Distribuutioteorian alkeet ja sovellutuksia

Eemeli Blåsten

Syyskuu 2008

Helsingin Yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Pro gradu -tutkielma
Ohjaaja: Lassi Päivärinta

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto – Fakultet/Sektion – Faculty	Laitos – Institution – Department	
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen laitos	

Tekijä – Författare – Author
Eemeli Blåsten

Työn nimi – Arbetets titel – Title
Distribuutioteorian alkeet ja sovellutuksia

Oppiaine – Läroämne – Subject
Matematiikka

Työn laji – Arbetets art – Level	Aika – Datum – Month and year	Sivumäärä – Sidoantal – Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Syyskuu 2008	61

Tiivistelmä – Referat – Abstract

Tässä tutkielmassa määritellään distribuutiot ja Fourier-muunnos, todistetaan niiden perusominaisuuksia ja katsotaan, miten niiden avulla voidaan ratkaista osittaisdifferentiaaliyhtälöitä. Distribuutiot määritellään sileiden ja kompaktikantajaisten ”testifunktioiden” jonojatkuvina lineaarisina funktionaaleina. Lokaalisti integroituvat funktiot voidaan tulkita distribuutioiksi tavanomaisen funktion ja testifunktion tulon integraalin avulla. Näin distribuutioiden voidaan ajatella laajentavan funktiokäsitettä.

Luku 1 on johdanto. Luvussa 2 tarkastellaan historiasta muutamia esimerkkejä, jotka ovat luoneet pohjaa distribuutioteorialle. Esimerkit käsittelevät erilaisia tapoja tulkita jokin funktio differentiaaliyhtälön ratkaisuksi.

Luvussa 3 määritellään testifunktiot sileiksi ja kompaktikantajaisiksi funktioiksi $\phi : X \to \mathbb{R}$. Niiden avaruus $C_0^\infty(X)$ todistetaan epätriviaaliksi jokaisella avoimella joukolla X. Testifunktioiden avaruuteen määritellään jonosuppeneminen, jonka jälkeen distribuutiot määritellään jonojatkuvina lineaarikuvauksina $C_0^\infty(X) \to \mathbb{R}$. Sitten määrittelemme distribuutioderivaatan, antiderivaatan, distribuution kantajan ja konvoluution kompaktikantajaisen distribuution kanssa.

Luku 4 sisältää esimerkin differentiaaliyhtälön ratkaisun yleistämisestä ja lineaarisen differentiaalioperaattorin perusratkaisun määritelmän.

Luvussa 5 määritellään Schwartzin testifunktioavaruus $S(X)$ ja sinne Fourier-muunnos. Tavanomaiset kaavat, mukaan lukien käänteismuunnoskaava, todistetaan. Avaruuden $S(X)$ jonojatkuvina funktionaaleina saadaan temperoidut distribuutiot. Nämä sisältävät ainakin kaikki polynomialisesti rajoitetut funktiot. Dualiteetin avulla Fourier-muunnos saadaan laajennettua niillekin.

Luku 6 keskittyy eräiden distribuutioiden määrittelyjoukon laajentamiseen. Aluksi ratkaisemme suoralla yhtälön $P(x)u = 0$, missä P on polynomi. Tämän jälkeen regularisoimme sellaiset homogeeniset distribuutiot, joiden ainoa singulariteetti on origossa ja joiden aste ei ole $-n, -n-1, \ldots$, missä n on avaruuden ulottuvuus. Tulosta sovelletaan eräiden osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisujen olemassaolon ja yksikäsitteisyyden osoittamiseksi.

Avainsanat – Nyckelord – Keywords
Distribuutioteoria, Fourier-muunnos, Temperoidut distribuutiot, Homogeeniset distribuutiot

Säilytyspaikka – Förvaringställe – Where deposited
Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja – Övriga uppgifter – Additional information

Sisältö

1 Johdanto **3**

2 Distribuutioteorian esihistoriaa **4**
2.1 Aaltoyhtälö, d'Alembert vastaan Euler 4
2.2 Differentiaaliyhtälöiden yleistettyjä ratkaisuja 4
2.3 Diracin δ-funktio ja perusratkaisut 6

3 Teoriaa **8**
3.1 Testifunktiot 10
3.2 Distribuutiot 13
3.3 Vektoriavaruus mutta ei tuloa 16
3.4 Derivointi 17
3.5 Antiderivaatta 19
3.6 Kantaja 21
3.7 Konvoluutio 23

4 Sovelluksia **31**
4.1 Aaltoyhtälön distribuutioratkaisut 31
4.2 Differentiaaliyhtälön perusratkaisu 32
4.3 Distribuutioista funktioihin 33

5 Fourier-muunnos distribuutioille **35**
5.1 Schwartzin avaruus 35
5.2 Temperoidut distribuutiot 42
5.3 Fourier-muunnos 44
5.4 Esimerkkejä 46

6 Yhtälöiden ratkaisemista **48**
6.1 Yhtälön $P(x)u = 0$ ratkaisu suoralla 48
6.2 Homogeenisten distribuutioiden regularisointi 51
6.3 Soveltaminen differentiaaliyhtälöihin 56

Viitteet **59**

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa esitellään distribuutioteoria, miten sen avulla voidaan yleistää Fourier-muunnos ja miten eräät hajaantuvat integraalit voidaan tulkita distribuutioiksi. Teoriaa käytetään paljon sovelletussa matematiikassa ja fysiikassa lineaaristen osittaisdifferentiaaliyhtälöiden yhteydessä.

Distribuutioteoria on tapa yleistää funktioita ja differentiaaliyhtälöiden ratkaisuja. Tyypillisin esimerkki on Diracin δ-funktio. Sitä voidaan ajatella funktiona, joka saa arvon nolla kaikkialla paitsi origossa, jossa sen arvo on ääretön. Kuitenkin δ-funktion integraalin arvo määritellään ykköseksi. Tämä ei ole kunnollinen määritelmä, sillä melkein kaikkialla nollana olevan funktion integraali häviää.

On huomattava, että fysikaalisissa laskuissa δ-funktiota käytetään välivaiheissa ja harvoin lopputuloksessa. Lopputuloksissakin se esiintyy vain integroitavassa. Sen käyttöä perusteltiin sanomalla, että koko päättely voitaisiin tehdä jonolle funktioilla ja lopuksi ottaa raja-arvo. Toinen tapa määritellä δ-funktio olisi tulkita se jatkuvien funktioiden funktionaaliksi, joka palauttaa funktion arvon origossa.

Schwartz ja Sobolev, [Schwartz 1950] ja [Sobolev 1936], antoivat distribuutioille täsmällisen määritelmän ja kehittivät niiden teoriaa. He määrittelivät distribuutiot sileiden kompaktikantajaisten "testifunktioiden" jonojatkuvina funktionaaleina. Tällä tavalla distribuutiot saatiin äärettömän monta kertaa derivoituviksi ja lokaalisti määriteltäviksi. Myös suuri osa tavanomaisten funktioiden kalkyylistä säilyy distribuutioille.

Tämän tekstin luvussa 2 tarkastellaan distribuutioteorian syntyyn vaikuttaneita tekijöitä. Luvussa 3 todistetaan testifunktioiden olemassaolo ja määritellään distribuutioiden vektoriavaruus. Assosiatiivisen tulon mahdottomuus osoitetaan myös. Lisäksi käsitellään operointia derivaatalla, antiderivaatalla ja konvoluutiolla. Nämä laajentavat funktioiden vastaavia operaatioita. Luvussa 4 näytetään muutama esimerkki distribuutioteorian soveltamisesta differentiaaliyhtälöihin. Luvussa 5 määritellään Schwartzin avaruus, temperoidut distribuutiot ja niille Fourier-muunnos. Käänteismuunnoksen kaava todistetaan myös. Lopuksi luvussa 6 regularisoidaan tietynasteiset homogeeniset distribuutiot.

2 Distribuutioteorian esihistoriaa

Tässä luvussa kerron hiukan taustaa distribuutioteorian synnylle. Tiedot ovat lähteestä [Lützen 1982]. Teorian synnylle on monia syitä, mutta tässä tarkastellaan kolmea. Aluksi katsotaan, miten Euler perusteli, että vain kerran jatkuvasti derivoituva funktio toteuttaisi aaltoyhtälön. Sitten tarkastellaan muita tapoja yleistää differentiaaliyhtälöiden ratkaisuja ja lopuksi käsitellään Diracin δ-funktiota.

2.1 Aaltoyhtälö, d'Alembert vastaan Euler

Jean le Rond d'Alembert näytti vuonna 1747 [d'Alembert 1747], että värähtelevän kielen pisteiden korkeudet y noudattavat yhtälöä

$$y = F(x+t) + G(x-t), \tag{1}$$

missä funktiot F ja G voidaan määrittää ongelman alkuehdoista. Heti tämän jälkeen Leonhard Euler päätyi [Euler 1748] samaan tulokseen suunnilleen samoilla periaatteilla kuin d'Alembert. Kiista syntyi siitä, millaisia funktioita F ja G saattoivat olla. D'Alembert sanoi eksplisiittisesti, että niiden on oltava analyyttisiä, mutta Euler oletti niiden olevan niin sanotusti E-epäjatkuvia, kuvaajinaan mitkä tahansa käsin piirretyt käyrät. Nykyään aaltoyhtälöksi kutsutaan osittaisdifferentiaaliyhtälöä

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{2}$$

joten voisi olettaa, että ratkaisun olisi oltava ainakin kaksi kertaa derivoituva.

D'Alembert kertoi, että Eulerin E-epäjatkuvien funktioiden käyttö oli kaikkien analyysin sääntöjen vastaista. Lisäksi hän perusteli väitteitään sanoen, että oikean- ja vasemmanpuoleisten derivaattojen on oltava samat. Euler sen sijaan uskoi, että aaltoyhtälön ratkaisut pakottivat matemaatikot laajentamaan käsityksiään. Hän tarkasteli muotoa (1) olevaa ratkaisua, joka olisi jatkuvasti derivoituva, mutta jonka toinen derivaatta olisi epäjatkuva. Hän kertoi, että tätä käyrää voidaan silottaa infinitesimaalisesti toisen derivaatan epäjatkuvuuskohdassa, jolloin käyrä eroaisi häviävän vähän alkuperäisestä, mutta olisi kaksinkertaisesti derivoituva. Hän siis ajatteli, että mikäli yhtälön ratkaisut suppenevat jotakin funktiota kohti, niin tämän funktion on myös oltava ratkaisu!

2.2 Differentiaaliyhtälöiden yleistettyjä ratkaisuja

Eräs sähköstatiikan tärkeä yhtälö on niin sanottu Poissonin yhtälö

$$\Delta V = -4\pi\rho, \tag{3}$$

missä ρ esittää sähkövaraustiheyttä ja V sähkökenttää. 1800-luvulla pyrittiin tutkimaan, minkälainen kenttä saadaan, kun lähteenä on pistemäinen kappale. Lützenin mukaan [Lützen 1982, s. 35] Henrik Petrinillä oli ensimmäinen eksplisiittinen maininta differentiaaliyhtälön yleistyksestä [Petrini 1908]. Hän kertoi, kuinka eri henkilöt yrittivät johtaa kaavaa (3) mahdollisimman yleisille ρ. Siméon-Denis Poisson johti sen, kun tiheys ρ oli vakio jonkin pisteen ympäristössä. Carl Friedrich Gauss johti sen, kun funktiolla ρ oli ensimmäisen kertaluvun derivaatat. Hölder päätyi samaan yhtälöön, kun oletettiin, että

$$|\rho - \rho_0| < Ar^{\mu},\ A, \mu > 0, \tag{4}$$

missä ρ_0 on tiheys jossakin pisteessä P, ρ esittää tiheyttä saman pisteen ympäristössä ja r on etäisyys vakiopisteestä P muuttujapisteeseen. Lopulta Petrini johti [Petrini 1899] yhtälön (3) olettaen vain varaustiheyden ρ jatkuvuuden, mutta tulkiten Laplace operaattorin näin:

$$\Delta V = \lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0 \\ h_3 \to 0}} \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{h_j} \left[\frac{\partial V(x + h_j e_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial V(x)}{\partial x_j} \right], \tag{5}$$

missä lukujen h_i suhteet eivät lähesty nollaa eivätkä ääretöntä. Tässä ΔV voi olla olemassa, vaikka toisen kertaluvun osittaisderivaatat eivät olisikaan olemassa.

Toinen yleistystapa on peräisin Maxime Bôcheriltä [Bôcher 1905/06]. Se perustuu Greenin kaavaan

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)dx = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right) ds. \tag{6}$$

Tavallisesti sanotaan, että funktio u on *harmoninen*, mikäli se on kaksi kertaa derivoituva ja $\Delta u = 0$. Bôcher kuitenkin määritteli sen seuraavasti:

Määritelmä. $u(x, y)$ sanotaan olevan *harmoninen* x, y-tason alueessa T, mikäli se on yksiarvoinen ja jatkuva siellä, sillä on jatkuvat ensimmäisen kertaluvun derivaatat ja jokaisella kokonaan alueen T sisällä olevalla ympyrällä pätee

$$\int \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0, \tag{7}$$

missä integroidaan ympyrän yli, vektorin n ollessa ulkonormaali ja s kaaren pituus.

Samassa julkaisussa Bôcher todisti, että funktio on harmoninen hänen määritelmänsä mukaan jos ja vain jos se on harmoninen perinteisen määritelmän mukaan. Tämä muistuttaa mielestäni paljon kolmannen asteen yhtälön ratkaisua *casus irreducibiliksessa*, jossa otettiin käyttöön kompleksiluvut, mutta laskun lopputuloksena tuli silti reaalilukuja.

Kolmas tapa yleistää ratkaisuja perustuu useampiulotteisiin osittaisintegroinnin kaavoihin. Norbert Wiener esitteli [Wiener 1926] yleistyksen, jota myöhemmin kutsuttiin heikoksi ratkaisuksi. Hän aloitti tarkastelemalla yhtälöä

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0. \tag{8}$$

Sitten hän otti mielivaltaisen positiivisen, äärettömän monta kertaa derivoituvan funktion $G(x, y)$, joka menee nollaksi jonkin monikulmion R ulkopuolella. Hän väitti, että tällöin on olemassa funktio G_1, jolla

$$\begin{aligned} &\iint_R (Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu)G(x, y)\, dx\, dy \\ &\qquad = \iint_R u(x, y)G_1(x, y)\, dx\, dy. \end{aligned} \tag{9}$$

Molemmat integraalit menevät nolliksi, mikäli u toteuttaa alkuperäisen differentiaaliyhtälön (8) melkein kaikkialla. Niimpä hän ajatteli, että jos u on kohtisuorassa kaikkia mahdollisia G_1 vastaan, niin se on differentiaaliyhtälön (8) yleistetty ratkaisu.

2.3 Diracin δ-funktio ja perusratkaisut

Fysiikassa puhutaan usein pistemassoista ja -lähteistä. Niitä kuvaillaan niin sanotulla δ-funktiolla, missä $\delta_0(x) = 0$, kun $x \neq 0$ ja $\delta_0(0) = \infty$, kuitenkin niin, että $\int \delta_0(x)dx = 1$. Tästä esimerkiksi seuraisi, että $\int \delta_0(x)f(x)dx = f(0)$. On selvää, että tällaista funktiota ei ole olemassa klassisessa mielessä. Richard Courant ja David Hilbert määrittelivät [Courant, Hilbert 1924] sen rajakäyntinä funktioista $\phi_\epsilon(x)$, kun $\epsilon \longrightarrow 0$, missä

$$\begin{gathered} \phi_\epsilon(x) = 0, \text{ kun } |x| > \epsilon \\ \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \phi_\epsilon(x)dx = 1. \end{gathered} \tag{10}$$

Diracin δ-funktiolla on hyödyllisiä erityisominaisuuksia. Jos merkitsemme tähdellä $*$ kahden funktion välistä konvoluutiota

$$(f * g)(x) = \int f(t)g(x - t)dt, \tag{11}$$

niin pätee $\delta_0 * f = f$. Konvoluutio käyttäytyy mukavasti derivaatan suhteen, sillä $(f * g)'(x) = (f' * g)(x)$. Näiden kahden havainnon perusteella päästään käsiksi perusratkaisuun:

Määritelmä. Jos L on lineaarinen differentiaalioperaattori, niin u on operaattorin L *perusratkaisu*, mikäli $L(u) = \delta_0$.

Miksi tämä on hyödyllinen? Jos L on vakiokertoiminen differentiaalioperaattori, ja tarkoituksena on ratkaista yhtälö $L(y) = f$, niin voimme käyttää operaattorin perusratkaisua u :

$$\begin{aligned} L(u * f) &= L(u) * f \\ &= \delta_0 * f \\ &= f \end{aligned} \tag{12}$$

Tämä toki toimi, mutta kukaan ei vielä osannut tyhjentävästi selittää miksi se ja lukemattomat muut symboliset laskut toimivat. Kirjassa *The Prehistory of the Theory of Distributions* [Lützen 1982] kerrotaan, kuinka eri tilanteissa kierettiin δ-funktiosta puhuminen. Esimerkiksi Green todisti [Green 1828], että

$$\int \Delta\Big(\frac{1}{|x - x'|}\Big)V(x)dx = V(x'), \tag{13}$$

Courant ja Hilbert käyttivät raja-arvomääritelmää ja muitakin tapoja oli. Vasta distribuutioteoria antoi tyydyttävän vastauksen.

3 Teoriaa

Tämän osan tarkoituksena on esitellä lyhyesti distribuutiot ja niihin kohdistettuja operaatioita. On oleellisesti ottaen kolme eri tapaa määritellä distribuutiot. Ne voidaan määritellä funktionaaleina, integraalien raja-arvoina tai C^∞-laajennuksena sopivan suppenemiskäsitteen avulla. Valitsemme perinteisen funktionaalilähestymistavan, minkä vuoksi käsittelemme aluksi testifunktioita. Sen jälkeen pääsemme määrittelemään distribuutiot ja tutkimaan niiden ominaisuuksia, kuten derivoituvuutta, antiderivaattoja, kantajaa ja konvoluutiota.

Eräitä tärkeitä asioita, joita ei käsitellä, ovat yksikön C^∞ ositus ja Sobolev-avaruudet. Lisäksi kaikki käsitellään vain pinnallisesti. Tämän luvun lauseet ovat tyypillisiä distribuutioteorian kurssien lauseita, eikä niillä ole mitään yksittäistä lähdettä. Pääajatukset on saatu lähteistä [Saksman] ja [Hörmander I].

Huomautus. Tässä tekstissä käytetään seuraavia merkintöjä muiden yleisesti hyväksyttyjen lisäksi.

1. paksunnetut kirjaimet $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ tarkoittavat luonnollisten lukujen (nolla mukaan lukien), reaalilukujen ja kompleksilukujen juokkoja. Kirjaimella X merkitään jotakin avaruuden $\mathbb{R}^n$ avointa epätyhjää osajoukkoa.

2. kirjaimet f, g, h merkitsevät funktioita, ϕ, φ, ψ testifunktioita, x, y, z muutujia, ξ, ζ taajuuspuolen muuttujia ja alaindeksi kertoo muuttujan komponentin (esim. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$). Kompleksiluvun x reaaliosa on $\Re x$ ja imaginääriosa $\Im x$.

3. aakkosten alkupään kirjaimet $\alpha, \beta, \gamma, \dots, a, b, c, \dots$ merkitsevät vakioita, n avaruuden ulottuvuutta, i imaginääriyksikköä ja j, k, l eri indeksejä.

4. merkintä $A := B$ tarkoittaa, että A määritellään kaavalla B.

5. jos $f(x)$ on jokin lauseke, niin pisteellä $\cdot$ muuttujan paikalla tarkoitetaan vastaavaa funktiota. Esim. jos f on funktio, niin $f(\cdot) + f(-\cdot)$ on funktio $x \mapsto f(x) + f(-x)$.

6. $C^k(X, Y)$ on k kertaa jatkuvasti derivoituvien funktioiden $X \to Y$ joukko, missä $X \subset \mathbb{R}^n$ on avoin ja $Y \subset \mathbb{C}^m$. Jos avaruutta Y ei merkitä, niin se pitää tulkita kompleksiluvuiksi. Jos myöskään avaruutta X ei ole merkitty, niin se tulkitaan koko avaruudeksi $\mathbb{R}^n$, missä n on yhteydestä selvä. $C_0^k(X, Y)$ on kuten $C^k(X, Y)$, mutta sisältää vain kompaktikantajaiset funktiot. Indeksi k voi olla myös ääretön, jolloin $C^\infty = \cap_k C^k$.

7. $\partial_{x_j} f$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $\partial_j f$ tarkoittavat funktion f osittaiderivaattaa muuttujan x_j suhteen. Fourier-muunnoksen yhteydessä käytetään differentiaalioperaattoria $D_j = -i\partial_j$. Gradientti on vektori $\nabla f = (\partial_1 f, \dots, \partial_n f)$. Yläindeksi $\partial_j^k f$ tarkoittaa k-kertaista osittaisderivointia $\partial_j \dots \partial_j f$. Yhden muuttujan tapauksessa merkitään $f' = \partial f$, $f'' = \partial^2 f$, $\dots$, $f^{(k)} = \partial^k f$.

8. funktion $f : X \to \mathbb{R}^n$ kantajalle on merkintä $\mathrm{supp}(f)$.

9. *multi-indekseillä* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on seuraavat merkinnät: $\partial^\alpha f = f^{(\alpha)} := \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f$, $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ ja $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$. Jos $\alpha_j \leq \beta_j$ kaikilla $j = 1, \dots, n$, niin merkitään $\alpha \leq \beta$.

10. eri normeja merkitsemme seuraavasti: $\|\phi\|_{\alpha,\beta} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta \phi(x) \right|$ ja $\|\phi\|_p := \left(\int \left| \phi(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$.

3.1 Testifunktiot

Haluamme määritellä distribuutiot testifunktioiden funktionaaleina. Tavallinen funktio f voidaan tulkita funktionaaliksi kaavalla $\phi \mapsto \int f(x)\phi(x)dx$. Mitä vähemmän ominaisuuksia haluamme vaatia funktiolta f, sitä enemmän niitä on vaadittava testifunktiolta ϕ, jotta integraali suppenisi. Tämä seuraa siitä, että suuri osa analyysissä esiintyvistä ominaisuuksista voidaan siirtää osittaisintegroinnilla tai muuttujanvaihdolla funktioiden f ja ϕ välillä.

Koska haluamme yleistää kaikki funktiot f derivoituviksi, niin testifunktiot on järkevä valita äärettömän monta kertaa derivoituviksi. Toisaalta emme halua mitään rajoitteita "kasvamiselle äärettömyydessä". Testifunktiot siis valitaan kompaktikantajaisiksi.

Määritelmä 3.1.1. Olkoon $X \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko. Funktio $\phi : X \to \mathbb{C}$ on *testifunktio*, mikäli

1) se on äärettömän monta kertaa jatkuvasti derivoituva
2) se on kompaktikantajainen

Testifunktioiden avaruudelle on kaksi yleistä merkintää: $\mathscr{D}(X)$ tai $C_0^\infty(X)$. Jos $X = \mathbb{R}^n$, niin merkitään vain lyhyesti $\mathscr{D}$ tai C_0^∞.

Huomautus. Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ kantaja on joukko $\mathrm{supp}(f) = \mathrm{cl}\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$, missä cl tarkoittaa sulkeumaa.

Minkälaisia testifunktiot käytännössä ovat? Tuntuu vaikealta keksiä eksplisiittistä lauseketta, jonka kantaja olisi epätyhjä ja kompakti. Todistamme kuitenkin, että epätriviaaleja (eli nollasta poikkeavia) testifunktioita on olemassa. Todistus on konstruktiivinen. Aluksi todistamme, että eräs apufunktio on äärettömän monta kertaa derivoituva. Sitten todistamme, että on olemassa testifunktio koko avaruudessa $\mathbb{R}^n$, jonka jälkeen skaalaamme sen mihin tahansa avoimeen joukkoon $X \subset \mathbb{R}^n$.

Lemma 3.1.2. *Funktio $\varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on äärettömän monta kertaa jatkuvasti derivoituva, kun*

$$\varrho(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \leq 0 \\ e^{-1/x}, & \text{muulloin} \end{cases} \tag{14}$$

Todistus. Todistetaan aluksi induktiolla, että

$$\partial_x^k \varrho(x) = \frac{P(x)}{x^{2k}} e^{-1/x}, \tag{15}$$

kun $x > 0$, missä P on jokin luvusta k riippuva polynomi. Huom. ϱ on äärettömän monta kertaa derivoituva joukossa $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$k = 0$: Väite pitää paikkansa, sillä $P(x) = 1$ on polynomi.

$k+1$: Oletetaan, että $\partial_x^k \varrho(x) = \frac{P(x)}{x^{2k}} e^{-1/x}$. Tällöin seuraavaksi derivaataksi saadaan

$$\begin{aligned} \partial_x^{k+1} \varrho(x) &= \frac{P'(x)}{x^{2k}} e^{-1/x} - \frac{2kP(x)}{x^{2k+1}} e^{-1/x} + \frac{P(x)}{x^{2k+2}} e^{-1/x} \\ &= \frac{x^2 P'(x) - 2kxP(x) + P(x)}{x^{2(k+1)}} e^{-1/x} \end{aligned} \tag{16}$$

joten induktioväite on tosi.

Riittää enää todistaa, että kaavan (15) funktio lähestyy nollaa, kun $x \longrightarrow 0+$, sillä tällöin kaikilla k funktion (14) toispuoleiset k-kertaiset derivaatat olisivat yhtä suuria origossa, joten funktio olisi äärettömän monta kertaa derivoituva. Olkoon $M = \sup_{x \in [-1,1]} |P(x)|$. Nyt saadaan arvio

$$\lim_{x \to 0+} \left| \frac{P(x)}{x^{2k}} e^{-1/x} \right| \leq M \lim_{x \to 0+} \frac{e^{-1/x}}{x^{2k}}. \tag{17}$$

Näytetään, että sillä on muotoa Cx oleva majorantti, toisin sanoen todistetaan funktio

$$x \mapsto \frac{e^{-1/x}}{x^{2k+1}} \tag{18}$$

rajoitetuksi joukossa $[0, \infty]$. Sen derivaatta,

$$\partial \frac{e^{-1/x}}{x^{2k+1}} = \frac{e^{-1/x}}{x^{2k+3}} - \frac{(2k+1)e^{-1/x}}{x^{2k+2}} = \frac{1 - (2k+1)x}{x^{2k+3}} e^{-1/x}, \tag{19}$$

on positiivinen välillä $]0, 1/(2k+1)[$ ja negatiivinen sen jälkeen, joten funktio (18) on rajoitettu. Nyt päästään jatkamaan epäyhtälöketjua numero (17)

$$= M \lim_{x \to 0+} \frac{e^{-1/x}}{x^{2k+1}} x \leq M \lim_{x \to 0+} Cx = 0. \tag{20}$$

$\square$

Lause 3.1.3. *On olemassa testifunktio $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.*

Todistus. Olkoon ϱ kuten kaavassa (14). Määritellään funktio $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$,

$$\phi(x) = \varrho(1 - |x|^2). \tag{21}$$

Tämän kantaja on suljettu yksikköpallo $\bar{B}(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$, joka on kompakti. Yllä todistettiin, että $\varrho \in C^\infty$, joten riittää osoittaa, että $x \mapsto 1 - |x|^2$ on C^∞-funktio. Se on kuitenkin selvää, sillä $1 - |x|^2 = 1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2$ on yhdiste komponenttiprojektioita ja polynomeja, jotka ovat kaikki C^∞. $\square$

Lause 3.1.4. *Olkoon $X \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja epätyhjä. Tällöin on olemassa testifunktio $\psi : X \to \mathbb{C}$.*

Todistus. Koska X on avoin ja epätyhjä, löytyy $x_0 \in X$ ja $\epsilon > 0$ siten, että x_0-keskinen ϵ-säteinen pallo $B(x_0, \epsilon)$ sisältyy kokonaan joukkoon X. Olkoon ϕ kuten kaavassa (21). Selvästi $\psi(x) = \phi(\frac{x-x_0}{2\epsilon})$ on C^∞. Tämän kantaja on $\bar{B}(x_0, \epsilon/2) \subset X$, sillä testifunktion ϕ kantaja on $\bar{B}(0, 1)$. □

Eräitä tärkeitä testifunktioita ovat niin sanotut "cutoff" funktiot. Niitä tarvitaan luvuissa 5 ja 6.

Lause 3.1.5. *Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin on olemassa testifunktio $\chi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, jonka kantaja sisältyy palloon $B(0, 2\epsilon)$ ja $\chi(x) = 1$, jos $|x| < \epsilon$.*

Todistus. Käyttäen funktiota (14) voimme määritellä

$$\gamma(t) = \frac{\varrho(2-t)}{\varrho(2-t) + \varrho(t-1)}. \tag{22}$$

Tämä on sileä, mikäli nimittäjä ei mene nollaksi. Tiedetään, että ϱ on aina vähintään nolla. $\varrho(t-1) = 0$ vain jos $t \leq 1$. Mutta tällöin $2 - t \geq 1 > 0$, joten $\varrho(2-t) > 0$. Siispä γ on sileä. Lisäksi jos $t \leq 1$, niin $\gamma(t) = 1$ ja jos $t \geq 2$, niin $\gamma(t) = 0$.

Kuvaus $\chi : x \mapsto \gamma(|x|/\epsilon)$ on sileä, koska sisäfunktion ainoa epäsileyskohta on $x = 0$, mutta γ on vakio origon ympärillä. Edellisen kappaleen viimeisen havainnon perusteella funktiolla χ on oikea kantaja ja $\chi(x) = 1$, kun $|x| < \epsilon$. □

Seuraavaksi määrittelemme testifunktiojonon suppenemisen. Koska testifunktiot $C_0^\infty(X)$ muodostavat vektoriavaruuden, niin riittää määritellä suppeneminen kohti nollafunktiota. Kyseisen suppenemisen ajatuksena on, että funktiot eivät lähene reunaa ja kaikkien derivaattojen maksimit menevät nollaan.

Määritelmä 3.1.6. Jono testifunktioita (ϕ_j) *suppenee* kohti nollafunktiota, $\phi_j \longrightarrow 0$, mikäli

1) on olemassa kompakti $K \subset X$ siten, että $\operatorname{supp}(\phi_j) \subset K$ kaikilla j,
2) ja kaikilla multi-indekseillä α on $\sup_{x\in X} |\partial^\alpha \phi_j(x)| \longrightarrow 0$.

Huomautus 3.1.7. On olemassa epätriviaaleja suppenevia testifunktiojonoja. Voidaan esimerkiksi valita nollasta poikkeava testifunktio ϕ ja jono a_j nollaan suppenevia reaalilukuja. Tällöin $a_j\phi \longrightarrow 0$.

Huomautus 3.1.8. Sanotaan, että (ϕ_j) suppenee kohti testifunktiota ψ, jos $\phi_j - \psi \longrightarrow 0$.

3.2 Distribuutiot

Testifunktioiden määritelmän ja olemassaolotodistuksen jälkeen distribuutiot on helppo määritellä jatkuvina lineaarisina kuvauksina. Tässä osassa annetaan distribuutioiden määritelmä ja tutkitaan hiukan minkälaisia ne ovat.

Määritelmä 3.2.1. Lineaarikuvaus $u : C_0^\infty(X) \to \mathbb{C}$ on *distribuutio*, mikäli se on jonojatkuva, eli kaikilla testifunktiojonoilla (ϕ_j) pätee $\phi_j \longrightarrow 0 \Rightarrow u(\phi_j) \longrightarrow 0$. Alueessa X määriteltyjen distribuutioiden joukkolle on merkintä $\mathscr{D}'(X)$.

Huomautus 3.2.2. Lineaarisuus tarkoittaa sitä, että $u(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha u(\phi) + \beta u(\psi)$ kaikilla *kompleksi*luvuilla $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ja testifunktioilla $\phi, \psi \in C_0^\infty(X)$.

Huomautus 3.2.3. Yleensä merkitään $\langle u, \phi \rangle$, eikä $u(\phi)$. Tämä johtuu siitä, että $(u, \phi) \mapsto u(\phi)$ on bilineaarimuoto.

Seuraavaksi tarkastellaan muutamia esimerkkejä. Niistä käy ilmi, että distribuutiot laajentavat lokaalisti integroituvia funktioita, mutta muunkinlaisia distribuutioita on.

Esimerkki 3.2.4 (Diracin δ-funktio). Määritellään kuvaus $\delta_0 : C_0^\infty \to \mathbb{C}$ kaavalla $\langle \delta_0, \phi \rangle = \phi(0)$. Tämä on selvästi lineaarinen. Olkoon (ϕ_j) jono nollaan suppenevia distribuutioita. Tällöin

$$|\langle \delta_0, \phi_j \rangle| = |\phi_j(0)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\phi_j(x)| \longrightarrow 0, \tag{23}$$

joten δ_0 on distribuutio.

Määritelmä 3.2.5. Olkoon (X, μ) topologinen mitta-avaruus. Sanotaan, että funktio $f : X \to \mathbb{C}$ on *lokaalisti integroituva*, mikäli

$$\int_K |f(x)| \mu(x) < \infty \tag{24}$$

kaikilla kompakteilla $K \subset X$. Tällaisten funktioiden joukolle on merkintä $L^1_{loc}(X)$. Jos X jätetään merkitsemättä, niin se tulkitaan avaruudeksi $\mathbb{R}^n$.

Kun funktioita tulkitaan distribuutioiksi, pyritään $\langle , \rangle$ tulkitsemaan funktioiden tulon integraalina. Koska testifunktiot ovat kompaktikantajaisia, niin on selvää, että lokaalisti integroituvat funktiot voidaan tulkita distribuutioiksi. Kuvaus $x \mapsto 1/x$ ei ole lokaalisti integroituva eikä siis distribuutio. Kuitenkin integraali $\int \phi(x)/x dx$ on äärellinen, mikäli nolla ei kuulu testifunktion ϕ kantajaan.

Esimerkki 3.2.6. Olkoon $f \in L^1_{loc}(X)$ ja $\phi \in C_0^\infty(X)$. Tällöin tulkitaan $\langle f, \phi \rangle = \int f(x)\phi(x)dx$. Tämä on hyvin määritelty, sillä se on rajoitettu: $|\int f\phi dx| \leq M \int_K |f|dx < \infty$, missä M on rajoitetun funktion $|\phi|$ maksimi ja $K = \mathrm{supp}(\phi)$ on kompakti. Koska integraali on äärellinen, niin se on testifunktioiden suhteen lineaarinen. Olkoon (ϕ_j) jono nollaan suppenevia testifunktioita. Tällöin löytyy kompakti $K \subset X$, johon $\mathrm{supp}(\phi_j)$ sisältyy kaikilla j. Nyt saadaan arvio

$$|\langle f, \phi_j \rangle| \leq \int_K |f||\phi_j|dx \leq \sup_{x\in X} |\phi_j(x)| \int_K |f|dx \longrightarrow 0, \tag{25}$$

kun $j \longrightarrow \infty$. Siispä f voidaan tulkita distribuutioksi.

Kaksi eri funktiota eivät voi vastata samaa distribuutiota eivätkä kaksi eri distribuutiota samaa funktiota. Jälkimmäinen väite on aika helppo todistaa, mutta ensimmäinen käyttää reaalianalyysissä hyvin tunnettua lausetta:

Lause (Lebesguen differentioituvuuslause). *Olkoon $f \in L^1_{loc}(X)$ lokaalisti integroituva funktio. Tällöin*

$$\lim_{r\to 0+} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \big|f(y) - f(x)\big|dy = 0 \tag{26}$$

melkein kaikilla $x \in X$.

Todistus. Lähteessä [Rudin] todistetaan lause, kun $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Kyseessä on lokaali ominaisuus, joten väite seuraa Rudinin todistamasta tapauksesta. □

Lause 3.2.7. *Olkoot $f, g \in L^1_{loc}(X)$. Tällöin $f = g$ melkein kaikkialla jos ja vain jos $f = g$ distribuutioina.*

Todistus. "$\Rightarrow$": Olkoon $f = g$ melkein kaikkialla. Tämä tarkoittaa, että

$$\int_X |f(x) - g(x)|\, dx = 0. \tag{27}$$

Olkoon nyt $\phi \in C_0^\infty(X)$. Saamme

$$\begin{aligned} |\langle f - g, \phi \rangle| &= \Big| \int_X \big(f(x) - g(x)\big)\phi(x)\, dx\Big| \leq \int_X \big|f(x) - g(x)\big||\phi(x)|\, dx \\ &\leq \sup_{x\in X} |\phi(x)| \int_X \big|f(x) - g(x)\big|\, dx = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Siispä $\langle f, \phi \rangle = \langle g, \phi \rangle$ kaikilla $\phi \in C_0^\infty(X)$.

"$\Leftarrow$": Olkoon $\langle f, \phi \rangle = \langle g, \phi \rangle$ kaikilla $\phi \in C_0^\infty(X)$. Olkoon lisäksi $\phi \in C_0^\infty(X)$ testifunktio, jolla $\int \phi dx = 1$ ja $\mathrm{supp}(\phi) \subset B(0,1)$ [1]. Merkitään $h = f - g$. Nyt saamme

$$\begin{aligned} h(x) &= r^{-n} \int h(x)\phi\big((y-x)/r\big)dy \\ &= r^{-n} \int \big(h(x) - h(y)\big)\phi\big((y-x)/r\big)dy + r^{-n} \int h(y)\phi\big((y-x)/r\big)dy \\ &= r^{-n} \int \big(h(x) - h(y)\big)\phi\big((y-x)/r\big)dy + r^{-n}\big\langle h, \phi\big((\cdot - x)/r\big)\big\rangle \\ &= r^{-n} \int_{B(x,r)} \big(h(x) - h(y)\big)\phi\big((y-x)/r\big)dy, \end{aligned} \tag{29}$$

josta voimme jatkaa Lebesguen differentioituvuuslauseella

$$\begin{aligned} |h(x)| &\leq r^{-n} \int_{B(x,r)} \big|h(x) - h(y)\big|\big|\phi\big((y-x)/r\big)\big|dy \\ &\leq \sup_{x \in X} |\phi(x)| \frac{m(B(0,1))}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \big|h(x) - h(y)\big|dy \longrightarrow 0, \end{aligned} \tag{30}$$

melkein kaikkialla, kun $r \longrightarrow 0$. Siispä $f = g$ melkein kaikkialla. □

Distribuution todistaminen hyvin määritellyksi ei aina ole yhtä helppoa kuin kahdessa edellisessä esimerkissä. Klassinen esimerkki saadaan niin sanotusta Cauchyn pääarvointegraalista. Siinä on ajatuksena "regularisoida" funktio $1/x$. Siis halutaan määritellä integraali $\int \phi(x)/x dx$ siten, että se suppenee aina. Lisäksi vaaditaan, että päädytään samaan tulokseen kuin tavallinen integraali, kun nolla ei kuulu testifunktion ϕ kantajaan.

Esimerkki 3.2.8. Määritellään funktion $1/x$ pääarvo, $p.v.1/x$, kaavalla

$$\langle p.v.\frac{1}{x}, \phi \rangle = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx, \tag{31}$$

missä $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Lause 3.2.9. *Esimerkin 3.2.8 kaava $\langle p.v.1/x, \phi \rangle$ määrittelee distribuution.*

Todistus. Aluksi osoitetaan, että $\langle p.v.1/x, \cdot \rangle$ on hyvin määritelty ja lineaarinen kuvaus $C_0^\infty \to \mathbb{C}$. Olkoon $\phi \in C_0^\infty$. Jos $\phi(0) = 0$, niin $x \mapsto \phi(x)/x$ on jatkuva, sillä $\lim_{x \to 0} \phi(x)/x$ on erotusosamäärän raja-arvo nollassa, eli

[1] Tällainen saadaan esimerkiksi skaalaamalla funktiota (21)

$\lim_{x\to 0}\phi(x)/x = \phi'(0)$. Jatkuvana ja kompaktikantajaisena se on integroituva. Oletetaan siis, että $\phi(0) \neq 0$, jolloin $\phi(x)/x$ ei ole jatkuva.

Tilanne voidaan yrittää pelastaa kirjoittamalla

$$\frac{\phi(x)}{x} = \frac{\phi(x)-\phi(0)}{x} + \frac{\phi(0)}{x}, \tag{32}$$

mutta $(\phi(x)-\phi(0))/x$ ei ole integroituva. Jos $\phi(0)$ kerrotaan sopivalla kompaktikantajaisella funktiolla, joka saa arvon 1 origossa, niin tilanne pelastuu: Olkoon $\psi \in C_0^\infty$, $\psi(0) = \phi(0)$ ja $\psi(x) = \psi(-x)$ [2]. Nyt saadaan

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{|x|>\epsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx &= \lim_{\epsilon\to 0+}\left(\int_{|x|>\epsilon}\frac{\phi(x)-\psi(x)}{x}dx + \int_{|x|>\epsilon}\frac{\psi(x)}{x}dx\right)\\ &= \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{|x|>\epsilon}\frac{\phi(x)-\psi(x)}{x}dx,\end{aligned} \tag{33}$$

sillä $\psi(-x)/(-x) = -\psi(x)/x$ ja integroimisalue on origon suhteen symmetrinen. Koska $\phi-\psi \in C_0^\infty$ ja $\phi(0)-\psi(0) = 0$, niin nähdään samoin perustein kuin todistuksen alussa, että integraali (33) on rajoitettu. Siispä $p.v.1/x$ on hyvin määritelty kuvaus $C_0^\infty \to \mathbb{C}$. Lineaarisuus seuraa integroinnin ja funktiolla kertomisen vastaavasta ominaisuudesta.

Enää pitää todistaa jatkuvuus. Olkoon (ϕ_j) nollaan suppeneva jono testifunktioita. Käyttämällä alaviitteen funktiota ψ nähdään, että $\phi_j(x)-\psi_j(x) = (\phi_j(x)-\phi_j(-x))/2$. Jos $\mathrm{supp}(\phi_j) \subset K$ kaikilla j, niin $\mathrm{supp}(\phi_j(\cdot)-\phi_j(-\cdot)) \subset K \cup -K =: K'$, joka on kompakti. Arvioidaan yhtälöä (33) ylöspäin:

$$\begin{aligned}|\langle p.v.\frac{1}{x},\phi_j\rangle| &= \Big|\lim_{\epsilon\to 0+}\frac{1}{2}\int_{|x|>\epsilon}\frac{\phi_j(x)-\phi_j(-x)}{x}dx\Big|\\ &\leq \frac{1}{2}\sup_{x\in\mathbb{R}}\Big|\frac{\phi_j(x)-\phi_j(-x)}{x}\Big|\int_{K'}dx\\ &\leq \frac{1}{2}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\Big|\frac{\phi_j(x)-\phi_j(0)}{x}\Big| + \Big|\frac{\phi_j(-x)-\phi_j(0)}{-x}\Big|\right)m(K')\\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}}\Big|\frac{\phi_j(x)-\phi_j(0)}{x}\Big|m(K') \leq \sup_{x\in\mathbb{R}}|\phi_j'(x)|m(K') \longrightarrow 0,\end{aligned} \tag{34}$$

väliarvolauseen ja $\phi_j \longrightarrow 0$ mukaan. Siispä $p.v.1/x$ on distribuutio. □

3.3 Vektoriavaruus mutta ei tuloa

Lause 3.3.1. *$\mathscr{D}'(X)$ on vektoriavaruus, kun summa ja kompleksiluvulla kertominen on määritelty kaavalla $\langle \alpha u + \beta v, \phi\rangle = \alpha\langle u,\phi\rangle + \beta\langle v,\phi\rangle$.*

[2] Tällainen on esimerkiksi $x \mapsto (\phi(x)+\phi(-x))/2$.

Todistus. Seuraa suoraan määritelmistä. $\square$

Tuloa ei ole mahdollista määritellä siten, että se laajentaisi funktioiden tuloa.

Lause 3.3.2. *Joukkoon $\mathscr{D}'(X)$ ei ole mahdollista määritellä tuloa $\star$ siten, että jos $f, g \in L^1_{loc}(X)$, niin distribuutio $f \star g$ vastaisi funktiota fg.*

Todistus. Todistamme väitteen tapauksessa $X = \mathbb{R}$; sama ajatus toimii, kun $X \subset \mathbb{R}^n$ on mielivaltainen alue. Olkoon $f \in L^1_{loc}$, $f(x) = 1/\sqrt{|x|}$. Nyt distribuution $f \star f$ pitäisi olla olemassa ja sen pitäisi vastata funktioita $x \mapsto f(x)f(x) = 1/|x|$. Se ei ole lokaalisti integroituva, joten sitä ei vastaa mikään distribuutio. $\square$

Tulo voidaan määritellä, jos toinen tekijä on C^∞-funktio. Ajatuksena on siirtää tulon sileä tekijä testifunktiolle. Jos $f \in C^\infty(X)$ ja $\phi \in C_0^\infty(X)$, niin $f\phi \in C_0^\infty(X)$. Mikäli $h \in L^1_{loc}$, niin $\langle hf, \phi \rangle = \int (hf)\phi dx = \int h(f\phi) dx = \langle h, f\phi \rangle$. Lisäksi $f\phi_j \longrightarrow 0$, mikäli $\phi_j \longrightarrow 0$. Siispä seuraava määritelmä on kunnollinen.

Määritelmä 3.3.3. Olkoon $f \in C^\infty(X)$ ja $u \in \mathscr{D}'(X)$. Tällöin distribuutioiden f ja u *tulo*, fu, on distribuutio $fu : \phi \mapsto \langle u, f\phi \rangle$.

Huomautus 3.3.4. Tähän mennessä mikään ei estä regularisoimasta funktiota $1/|x|$, joten lauseen 3.3.2 päättely ei kerro koko totuutta. Kuitenkaan edes sileällä funktiolla kertominen ei ole liitännäinen operaatio: $\delta_0 \cdot (x \cdot p.v.1/x) = \delta_0 \cdot 1 = \delta_0 \neq 0 = 0 \cdot p.v.1/x = (\delta_0 \cdot x) \cdot p.v.1/x$.

3.4 Derivointi

Distribuutioiden yksi tavoite oli korjata kaikki funktiot derivoituviksi. Määrittelemme seuraavaksi distribuutioiden derivaatat siten, että ne vastaavat funktioiden derivointia. Jos $f \in C^1(X)$, niin

$$\begin{aligned}
\langle \partial_j f, \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j f \phi \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \partial_j f \phi \, dx_j dx_2 \dots dx_1 \dots dx_n \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\Big/_{-\infty}^{\infty} f\phi - \int_{-\infty}^{\infty} f \partial_j \phi \, dx_j \Big) dx_2 \dots dx_1 \dots dx_n \qquad (35) \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} f \partial_j \phi \, dx = -\langle f, \partial_j \phi \rangle,
\end{aligned}$$

Fubinin lauseen mukaan. Osittaisintegroinnin sijoitustermi $\Big/_{-\infty}^{\infty} f\phi$ häviää, koska $\operatorname{supp}(\phi)$ on kompakti.

Määritelmä 3.4.1. Olkoon $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multi-indeksi ja $u \in \mathscr{D}'(X)$. Tällöin distribuution u *α-kertainen distribuutioderivaatta*, $\partial^\alpha u$, määritellään kaavalla $\langle \partial^\alpha u, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha \phi \rangle$.

Lause 3.4.2. *Olkoon $u \in \mathscr{D}'(X)$ ja $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Tällöin $\partial^\alpha u \in \mathscr{D}'(X)$.*

Todistus. Jos $\phi \in C_0^\infty(X)$, niin $\partial^\alpha \phi \in C_0^\infty(X)$, joten $\partial^\alpha u : C_0^\infty(X) \to \mathbb{C}$. Sitten lineaarisuus: olkoot $a, b \in \mathbb{C}$ ja $\phi, \psi \in C_0^\infty(X)$. Nyt

$$\begin{aligned} \langle \partial^\alpha u, a\phi + b\psi \rangle &= (-1)^{|\alpha|}\langle u, a\partial^\alpha \phi + b\partial^\alpha \psi \rangle \\ &= a(-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha \phi \rangle + b(-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha \psi \rangle \\ &= a\langle \partial^\alpha u, \phi \rangle + b\langle \partial^\alpha u, \psi \rangle. \end{aligned} \tag{36}$$

Siispä $\langle \partial^\alpha u, \cdot \rangle$ on lineaarinen. Todistetaan seuraavaksi jatkuvuus.

Olkoon (ϕ_j) nollaan suppeneva jono testifunktioita. Koska $\operatorname{supp}(\partial^\alpha \phi_j) \subset \operatorname{supp}(\phi_j)$, niin näiden kantajat sisältyvät yhteen kompaktiin joukkoon, siihen johon funktioiden ϕ_j kantajat sisältyvät. Lisäksi $\sup_{x\in X} |\partial^\beta \phi_j(x)| \longrightarrow 0$ kaikilla $\beta \in \mathbb{N}^n$, joten $\sup_{x\in X} |\partial^\gamma \partial^\alpha \phi_j(x)| \longrightarrow 0$ kaikilla $\gamma \in \mathbb{N}^n$. Siispä $\partial^\alpha \phi_j \longrightarrow 0$. Koska u oli jatkuva, niin $|\langle \partial^\alpha u, \phi_j \rangle| = |\langle u, \partial^\alpha \phi_j \rangle| \longrightarrow 0$. □

Kaikki distribuutiot ovat siis derivoituvia. Miltä näyttää derivoitumattoman funktion distribuutioderivaatta? Tarkastellaan kahta havainnollistavaa esimerkkiä.

Esimerkki 3.4.3. Olkoon $H : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Heavisiden funktio

$$H(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x < 0 \\ 1 & , \text{kun } x \geq 0 \end{cases}. \tag{37}$$

Lasketaan sen distribuutioderivaatta, eli määritetään, mitä $\langle H', \phi \rangle$ on jokaisella testifunktiolla ϕ. Olkoon ϕ mielivaltainen testifunktio. Nyt

$$\langle H', \phi \rangle = -\langle H, \phi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\phi'(x)\,dx = -\int_0^\infty \phi'(x)\,dx = \phi(0), \tag{38}$$

joten vanha symbolinen väite $H' = \delta_0$ on totta! Deltafunktiollakin on distribuutioderivaatta:

$$\langle \delta_0', \phi \rangle = -\langle \delta_0, \phi' \rangle = -\phi'(0). \tag{39}$$

Tämä on esimerkki distribuutiosta, jota ei voida esittää L^1_{loc} funktiona eikä mittana.

Esimerkki 3.4.4. Lasketaan jatkuvan, mutta yhdessä kohtaa derivoitumattoman funktion distribuutioderivaatta. Esimerkiksi itseisarvofunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\langle |\cdot|', \phi \rangle = -\langle |\cdot|, \phi' \rangle &= -\int_{-\infty}^{\infty} |x|\phi'(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} x\phi'(x)\,dx - \int_{0}^{\infty} x\phi'(x)\,dx \\
&= -\int_{-\infty}^{0} \phi(x) + \int_{0}^{\infty} \phi(x)\,dx \\
&= \langle 2H-1, \phi \rangle.
\end{aligned} \tag{40}$$

Saatiin epäjatkuva derivaatta.

Yleisesti on totta, että mikäli paloittain derivoituvalla funktiolla on hyppy pisteessä x_0, niin sen distribuutioderivaatassa esiintyy δ_{x_0}. Mikäli sen derivaatalla on hyppy, niin distribuutioderivaatassa esiintyy lisäksi $H(\cdot - x_0)$.

3.5 Antiderivaatta

Seuraavaksi näemme, että jokainen distribuutio on jonkin toisen derivaatta.

Määritelmä 3.5.1. Olkoon $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Tällöin $U \in \mathscr{D}'(X)$ on distribuution u jokin *α-kertainen integraali*, mikäli $\partial^\alpha U = u$.

Lause 3.5.2. *Jokaisella avaruuden $\mathbb{R}^n$ distribuutiolla on α-kertainen integraali kaikilla multi-indekseillä $\alpha \in \mathbb{N}^n$.*

Todistus. Riittää todistaa väite tapauksessa $|\alpha| = 1$, sillä yleinen tapaus saadaan tästä tapauksesta peräkkäisillä integraaleilla. Olkoon siis $\partial^\alpha = \partial_j$ ja olkoon u mielivaltainen distribuutio. Konstruoimme distribuution U, jolla $\partial_j U = u$. Määrittelemme, mitä $\langle U, \phi \rangle$ on kaikilla $\phi \in C_0^\infty$, mutta kuitenkin niin, että $\langle \partial_j U, \phi \rangle = \langle U, -\partial_j \phi \rangle = \langle u, \phi \rangle$.

Olkoon $\phi \in C_0^\infty$. Jos ϕ on testifunktion Φ osittaisderivaata, $\phi = \partial_j \Phi$, niin määrittelemme $\langle U, \phi \rangle := \langle u, -\Phi \rangle$. Tällöin $\langle \partial_j U, \Phi \rangle = \langle U, -\partial_j \Phi \rangle = \langle U, -\phi \rangle = \langle u, \Phi \rangle$, eli $\partial_j U = u$. Kuitenkaan U ei ole vielä määriteltynä kaikille testifunktioille.

Edellisestä saadaan idea varsinaiselle distribuution U määritelmälle. Haluaisimme määritellä

$$\langle U, \phi \rangle = -\Big\langle u, \int_{-\infty}^{x_j} \phi(x_1, \ldots, t, \ldots, x_n)dt \Big\rangle, \tag{41}$$

mutta se ei onnistu, sillä integroinnin jälkeen saatu funktio ei välttämättä mene nollaksi äärettömydessä. Se on kuitenkin äärettömän sileä. Voisimme korjata tilanteen seuraavasti

$$\int_{-\infty}^{x_j} \phi(x_1, \ldots, t, \ldots, x_n)dt - \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x_1, \ldots, t, \ldots, x_n)dt, \tag{42}$$

mutta tämä ei välttämättä mene nollaksi negatiivisessa äärettömyydessä muuttujan x_j suhteen. Tilanteen pelastaa funktio

$$\psi_\phi(x) := \int_{-\infty}^{x_j} \phi(x_1, \ldots, t, \ldots, x_n)dt - G(x_j) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x_1, \ldots, t, \ldots, x_n)dt, \tag{43}$$

missä $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on jokin kiinnitetty C^∞ funktio, jolla $G(t) = 0$, kun $t \leq 0$ ja $G(t) = 1$, kun $t \geq 1$. Tällainen on olemassa[3]. Funktio ψ_ϕ on jokaisen muuttujan suhteen äärettömän monta kertaa derivoituva, joten se on sileä. Se on myös kompaktikantajainen:

Olkoot kaikki muuttujat, paitsi x_j kiinnitetty. Etsitään funktion $x_j \mapsto \psi_\phi(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$ kantajalle muista muuttujista riippumattomat rajat. Merkitään funktiolla pr_j kohtisuoraa projektiota yksikkövektorin e_j määräämään aliavaruuteen. Mikäli $x_j \leq \min(0, \inf \mathrm{pr}_j \operatorname{supp}(\phi))$, niin

$$|\psi_\phi(x)| = \left| \int_{-\infty}^{x_j} \phi(x_1, \ldots, t, \ldots, x_n)dt \right| = 0, \tag{44}$$

sillä $\phi = 0$, jos jokin sen muuttujista on kantajan projektion ulkopuolella. Jos taas $x_j \geq \max(1, \sup \mathrm{pr}_j \operatorname{supp}(\phi))$, niin

$$|\psi_\phi(x)| = \left| \int_{-\infty}^{x_j} \phi(x_1, \ldots, t, \ldots, x_n)dt - \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x_1, \ldots, t, \ldots, x_n)dt \right| = 0, \tag{45}$$

sillä kaikki kontribuutio jälkimmäiseen integraaliin tulee samasta alueesta, jonka yli ensimmäinen integraali on. Siispä $\mathrm{pr}_j \operatorname{supp}(\psi_\phi)$ on kompakti.

Olkoot seuraavaksi kaikki muuttujat, paitsi x_k kiinnitetty ($k \neq j$). Mikäli $x_k \notin \mathrm{pr}_k \operatorname{supp}(\phi)$, niin

$$|\psi_\phi(x)| = \left| \int_{-\infty}^{x_j} \phi(x_1, \ldots, t, \ldots, x_n)dt - G(x_j) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x_1, \ldots, t, \ldots, x_n)dt \right| = 0, \tag{46}$$

sillä molemmissa integraaleissa $\phi = 0$, koska sen muuttuja x_k on kantajan ulkopuolella. Siispä $\mathrm{pr}_k \operatorname{supp}(\psi_\phi) \subset \mathrm{pr}_k \operatorname{supp}(\phi)$ on kompakti. Funktion ψ_ϕ

[3]Esimerkiksi $G(t) = \int_{-\infty}^{t} g(s)ds / \int_{-\infty}^{\infty} g(s)ds$, missä g on sopivasti skaalattu ja siirretty ei-negatiivinen testifunktio.

kantajan projektio jokaiselle koordinaattiakselille on siis kompakti. Projektioiden karteesinen tulo on myös kompakti, joten siihen sisältyvä suljettu $\operatorname{supp}(\psi_\phi)$ on myös.

Voimme nyt määritellä (funktion G valinnan jälkeen)

$$\langle U, \phi \rangle := -\langle u, \psi_\phi \rangle. \tag{47}$$

U on tällöin lineaarinen kuvaus $C_0^\infty \to \mathbb{C}$. Lisäksi jos jono $\phi_l \longrightarrow 0$, niin $\psi_{\phi_l} \longrightarrow 0$. Tämä seuraa siitä, että

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}(\psi_{\phi_l}) &\subset \operatorname{pr}_1 \operatorname{supp}(\phi_l) \times \ldots \times [0,1] \cup \operatorname{pr}_j \operatorname{supp}(\phi_l) \times \ldots \times \operatorname{pr}_n \operatorname{supp}(\phi_l) \\ &\subset \operatorname{pr}_1 K \times \ldots \times [0,1] \cup \operatorname{pr}_j K \times \ldots \times \operatorname{pr}_n K \end{aligned} \tag{48}$$

on kompakti ja ideksistä l riippumaton, kun K on kompakti joukko, johon kaikkien ϕ_l kantajat sisältyvät. Lisäksi integraalit suppenevat tasaisesti nollaan, koska integroitavat ovat kompaktisti kannatettuja ja suppenevat tasaisesti nollaan. Koska u on distribuutio, niin $\langle U, \phi_l \rangle = -\langle u, \psi_{\phi_l} \rangle \longrightarrow 0$. Siispä U on distribuutio.

Osoitetaan vielä, että $\partial_j U = u$. Olkoon $\phi \in C_0^\infty$, jolloin

$$\langle \partial_j U, \phi \rangle = -\langle U, \partial_j \phi \rangle = \langle u, \psi_{\partial_j \phi} \rangle. \tag{49}$$

Enää yksi lasku:

$$\begin{aligned} \psi_{\partial_j \phi}(x) &= \int_{-\infty}^{x_j} \partial_j \phi(x_1, \ldots, t, \ldots, x_n) dt - G(x_j) \int_{-\infty}^{\infty} \partial_j \phi(x_1, \ldots, t, \ldots, x_n) dt \\ &= \Big/_{-\infty}^{x_j} \phi(x_1, \ldots, t, \ldots, x_n) - G(x_j) \Big/_{-\infty}^{\infty} \phi(x_1, \ldots, t, \ldots, x_n) \\ &= \phi(x), \end{aligned} \tag{50}$$

joten $\langle \partial_j U, \phi \rangle = \langle u, \phi \rangle$. $\square$

3.6 Kantaja

Katsotaan aluksi, miten kahden L^1_{loc}-funktion yhtäsuuruutta jossakin joukossa voidaan tutkia testifunktioiden avulla. Sitten määrittelemme, mitä tarkoittaa, että kaksi distribuutiota ovat samat jossakin osajoukossa $A \subset X$. Tämän jälkeen kantaja voidaan määritellä pienimpänä suljettuna joukkona, jonka komplementissa kyseinen distribuutio on nolla.

Lause 3.6.1. *Olkoot $f, g \in L^1_{loc}(X)$. Tällöin $f|A = g|A$ avoimella joukolla $A \subset X$ jos ja vain jos $\langle f, \phi \rangle = \langle g, \phi \rangle$ kaikilla testifunktioilla $\phi \in C_0^\infty(A)$.*

Todistus. Tämä on selvää lauseesta 3.2.7 sivulla 14, jossa todistettiin, että lokaalisti integroituvien funktioiden ja niiden distribuutioiden vastaavuudet ovat yksikäsitteisiä. □

Huomautus 3.6.2. Tarkasti ottaen $\langle f, \phi \rangle$ ei ole määritelty, kun $\phi \in C_0^\infty(A)$, mutta tässä ja jatkossa jatkamme kaikki suppeamman joukon testifunktiot nollana suurempaan joukkoon.

Määritelmä 3.6.3. Olkoot $u, v \in \mathscr{D}'(X)$ ja $A \subset X$ avoin. Jos $\langle u, \phi \rangle = \langle v, \phi \rangle$ kaikilla $\phi \in C_0^\infty(A)$, niin sanomme, että *$u = v$ joukossa A*.

Klassisten funktioiden kantaja määritellään kaavalla

$$\operatorname{supp}(f) = \operatorname{cl} \big\{ x \mid f(x) \neq 0 \big\}, \tag{51}$$

mutta L^1_{loc}-funktioiden pisteittäisistä arvoista ei voi puhua, sillä nollamittaisessa joukossa eroavat funktiot edustavat samaa ekvivalenssiluokkaa. Eräs tapa määritellä lokaalisti integroituvan funktion kantaja on

$$\operatorname{supp}(f) = X \setminus \big\{ x \mid \text{pisteellä } x \text{ on ympäristö, jossa } f = 0 \big\}. \tag{52}$$

Käytämme distribuutioiden kantajan määritelmässä jälkimmäistä ehtoa, sillä olemme määritelleet, mitä tarkoittaa nollana oleminen avoimessa joukossa.

Määritelmä 3.6.4. Olkoon $u \in \mathscr{D}'(X)$. Tällöin joukkoa

$$\operatorname{supp}(u) = X \setminus \big\{ x \in X \mid \text{pisteellä } x \text{ on ympäristö, jossa } u = 0 \big\} \tag{53}$$

sanotaan distribuution u *kantajaksi*.

Huomautus 3.6.5. On totta, että $u = 0$ joukossa $X \setminus \operatorname{supp}(u)$, mutta sen todistus käyttää yksikön ositusta.

Lasketaan yhden distribuution kantaja:

Esimerkki 3.6.6. δ_0-funktion kantaja on $\{0\}$:

"$\subset$": Olkoon $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Koska $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on avoin, löytyy pisteelle x ympäristö $A \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Nyt jos $\phi \in C_0^\infty(A)$ on mielivaltainen, niin $\langle \delta_0, \phi \rangle = \phi(0) = 0$, joten $\delta_0 = 0$ joukossa A. Siis $x \notin \operatorname{supp}(\delta_0)$, joten $\operatorname{supp}(\delta_0) \subset \{0\}$.

"$\supset$": Olkoon A origon mielivaltainen ympäristö. Tällöin on olemassa testifunktio $\phi \in C_0^\infty(A)$, jolla $\phi(0) \neq 0$. Nyt $\langle \delta_0, \phi \rangle = \phi(0) \neq 0$, joten δ_0 ei ole nolla origon missään ympäristössä. Siispä $\{0\} \subset \operatorname{supp}(\delta_0)$.

Lopuksi vielä määrittelemme kompaktikantajaiset distribuutiot.

Määritelmä 3.6.7. $u \in \mathscr{D}'(X)$ on *kompaktikantajainen*, jos $\operatorname{supp}(u)$ on kompakti alueen X osajoukko.

3.7 Konvoluutio

Aluksi määrittelemme distribuutioiden ja testifunktioiden välisen konvoluution ja todistamme tavanomaiset derivointikaavat $\partial(u * \phi) = (\partial u) * \phi = u * (\partial\phi)$. Tämän jälkeen tuntuisi järkevältä määritellä kahden distribuution välinen konvoluutio $w = u * v$ siten, että $w * \phi = u * (v * \phi)$.

Huomautus 3.7.1. Tarkastelemme koko avaruudessa $\mathbb{R}^n$ määriteltyjä distribuutioita, sillä muuten konvoluutio ei välttämättä ole määritelty samassa joukossa kuin alkuperäinen distribuutio.

Tutkitaan aluksi, miten lokaalisti integroituvan funktion ja testifunktion välinen konvoluutio voidaan määritellä käyttäen hyväksi vain funktion f distribuutiomuodossa olevaa tietoa. Olkoot siis $f \in L^1_{loc}$ ja ϕ testifunktio. Nyt

$$f * \phi\,(x) = \int f(y)\phi(x-y)dy \tag{54}$$

on hyvin määritelty, sillä $|f * \phi\,(x)| \leq \sup(\phi) \int_{\mathrm{supp}(\phi(x-\cdot))} |f| dy < \infty$, koska f on integroituva jokaisessa kompaktissa joukossa. Kaava (54) näyttää melkein lokaalisti integroituvien funktioiden distribuutiomääritelmältä, oikeastaan

$$f * \phi\,(x) = \langle f, \phi(x-\cdot)\rangle. \tag{55}$$

Tämä on hyvin määritelty, sillä jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$ kuvaus $y \mapsto \phi(x-y)$ on testifunktio. Tässä kohtaa tulisi ongelmia konvoluution määrittelyjoukon kanssa, mikäli tutkittaisiin mielivaltaisen kiinnitetyn avoimen joukon $X \subset \mathbb{R}^n$ testifunktioita.

Määritelmä 3.7.2. Olkoon $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ ja $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Tällöin näiden välinen *konvoluutio*, $u * \phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, määritellään kaavalla

$$u * \phi\,(x) = \langle u, \phi(x-\cdot)\rangle. \tag{56}$$

Seuraavaksi todistamme, että $u * \phi$ on äärettömän monta kertaa derivoituva ja että sen kantaja on kompakti, mikäli u on kompaktikantajainen. Tämä antaa mahdollisuuden määritellä kahden distribuution välisen konvoluution esimerkiksi kaavalla $(u * v) * \phi = u * (v * \phi)$, mikäli toisen kantaja on kompakti.

Huomautus 3.7.3. Seuraavan lauseen todistus on ensimmäinen, jossa varsinaisesti tarvitsemme distribuutioiden jatkuvuusoletusta. Tähän mennessä se on ollut vain rasitteena todistettaessa erilaisten distribuutioiden olemassaoloa.

Lause 3.7.4. *Olkoot* $u \in \mathscr{D}'$ *ja* $\phi \in C_0^\infty$. *Tällöin kuvaus* $u * \phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *on äärettömän monta kertaa derivoituva ja* $\partial^\alpha(u * \phi) = u * \partial^\alpha \phi = (\partial^\alpha u) * \phi$ *kaikilla* $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Todistus. Osoitamme aluksi, että $\partial_j(u * \phi) = u * (\partial_j \phi) = (\partial_j u) * \phi$. Olkoot $x \in \mathbb{R}^n$, $h > 0$ ja e_j jokin koordinaattiakselien suuntainen yksikkövektori. Saamme

$$\begin{aligned}
\partial_j(u * \phi)(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{u * \phi(x + he_j) - u * \phi(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \Big\langle u, \frac{\phi(x + he_j - \cdot) - \phi(x - \cdot)}{h} \Big\rangle \\
&= \langle u, \partial_j \phi(x - \cdot) \rangle = u * (\partial_j \phi)(x),
\end{aligned} \tag{57}$$

mikäli jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$ seuraava erotusosamäärä suppenee testifunktioiden avaruudessa:

$$\phi_h := \frac{\phi(\cdot + he_j) - \phi(\cdot)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{C_0^\infty} \partial_j \phi \tag{58}$$

Tämä on totta. Ensinnäkin ϕ_h on testifunktio, kun $h > 0$. Tämä seuraa siitä, että kiinteällä h se on vain kahden testifunktion translaation lineaarikombinaatio. Lisäksi, kun esimerkiksi $1 > h > 0$, kaikkien ϕ_h kantajat sisältyvät testifunktion ϕ kantajan johonkin kiinnitettyyn affiiniin kuvaan, joka on kompakti. Enää riittää todistaa derivaattojen tasainen suppeneminen. Olkoot β multi-indeksi ja $x \in \mathbb{R}^n$. Saamme

$$\begin{aligned}
&|\partial^\beta \phi_h(x) - \partial^\beta \partial_j \phi(x)| = \Big| \frac{\partial^\beta \phi(x + he_j) - \partial^\beta \phi(x)}{h} - \partial^\beta \partial_j \phi(x) \Big| \\
&= \Big| \frac{d}{dH} \partial^\beta \phi(x + He_j)_{\big| H = H_h} - \partial^{\beta + e_j} \phi(x) \Big| \\
&= \big| (\nabla \partial^\beta \phi)(x + H_h e_j) \cdot \frac{d}{dH}(x + He_j)_{\big| H = H_h} - \partial^{\beta + e_j} \phi(x) \big| \\
&= \big| (\nabla \partial^\beta \phi)(x + H_h e_j) \cdot e_j - \partial^{\beta + e_j} \phi(x) \big| = \big| \partial^{\beta + e_j} \phi(x + H_h e_j) - \partial^{\beta + e_j} \phi(x) \big| \\
&= \big| \frac{d}{dM} \partial^{\beta + e_j} \phi(x + Me_j) H_h{}_{\big| M = M_{H_h}} \big| = \big| \partial^{\beta + 2e_j} \phi(x + M_H e_j) H_h \big| \\
&\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \big| \partial^{\beta + 2e_j} \phi(x) \big| h \xrightarrow[h \to 0]{} 0,
\end{aligned} \tag{59}$$

missä $H_h \in]0, h[$ ja $M_{H_h} \in]0, H_h[$ tulivat väliarvolauseen käytöstä derivoituviin funktioihin $h \mapsto \partial^\beta \phi(x + he_j)$ ja $H \mapsto \partial^{\beta + e_j} \phi(x + He_j)$. Koska suppeneminen on tasaista pisteen x suhteen, niin erotusosamäärä suppenee testifunktioiden avaruudessa funktioon $\partial_j \phi$. Siispä $\partial_j(u * \phi) = u * (\partial_j \phi)$.

Koska $\partial_j \phi$ on testifunktio, niin $\partial_j(u * \phi) = u * (\partial_j \phi)$ on derivoituva. Induktiolla nähdään, että $u * \phi$ on äärettömän monta kertaa derivoituva ja että $\partial^\alpha(u * \phi) = u * \partial^\alpha \phi$. Toinen yhtälö seuraa kaavasta $\partial^\alpha(u * \phi)\,(x) = u * \partial^\alpha \phi\,(x) = \langle u, (\partial^\alpha \phi)(x - \cdot)\rangle = \langle u, (-1)^\alpha \partial^\alpha(\phi(x - \cdot))\rangle = \langle \partial^\alpha u, \phi(x - \cdot)\rangle = (\partial^\alpha u) * \phi\,(x)$. □

Lause 3.7.5. *Olkoot $u \in \mathscr{D}'$ ja $\phi \in C_0^\infty$. Tällöin*

$$\operatorname{supp}(u * \phi) \subset \operatorname{supp}(u) + \operatorname{supp}(\phi). \tag{60}$$

Jos u on kompaktikantajainen, niin $u * \phi$ on kompaktikantajainen.

Todistus. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ distribuution u kantaja ja $B \subset \mathbb{R}^n$ testifunktion ϕ kantaja. Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$ sellainen, että $(x - B) \cap A = \emptyset$ eli $x \notin A + B$. Nyt $u * \phi\,(x) = \langle u, \phi(x - \cdot)\rangle = 0$, sillä $\operatorname{supp}(\phi(x - \cdot)) \subset x - B \subset \mathbb{R}^n \setminus A$. Siispä $\operatorname{supp}(u * \phi) \subset A + B$.

Riittää enää todistaa, että kahden kompaktin joukon summa on kompakti joukko. Koska on kyseessä metrinen avaruus, riittää osoittaa, että joukon $A + B$ jokaisella jonolla on suppeneva osajono. Olkoon $(x_l) \subset A + B$ jono. Tällöin on olemassa jonot $(a_l) \subset A$ ja $(b_l) \subset B$, joille $x_l = a_l + b_l$. Koska A on kompakti, niin on olemassa suppeneva osajono $a_{l_k} \longrightarrow a \in A$. Koska B on kompakti, jonolla (b_{l_k}) on suppeneva osajono $b_{l_{k_m}} \longrightarrow b \in B$. Saimme jonolle (x_l) suppenevan osajonon $x_{l_{k_m}} \longrightarrow a + b \in A + B$. Siispä $A + B$ on kompakti. □

Lause 3.7.6. *Olkoot $u \in \mathscr{D}'$ ja $\phi, \psi \in C_0^\infty$. Tällöin $(u * \phi) * \psi = u * (\phi * \psi)$.*

Todistus. Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin

$$\begin{aligned} u * (\phi * \psi)\,(x) &= \langle u, \phi * \psi\,(x - \cdot_u)\rangle \\ &= \Big\langle u, \int \phi(T)\psi(x - \cdot_u - T)dT \Big\rangle \\ &= \Big\langle u, \int \phi(x - \cdot_u - T)\psi(T)dT \Big\rangle. \end{aligned} \tag{61}$$

Koska ϕ ja ψ ovat kompaktikantajaisia, niin integraali on kompaktikantajainen. Approksimoidaan integraalia Riemannin summalla. Jos f on jatkuva ja sen kantaja sisältyy kuutioon $[-M, M]^n$, niin väliarvolauseen integraalimuotoilun perusteella

$$\Big| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h^n f(hk) - \int f(x)dx \Big| \leq (2M)^n \sup_{|x-y| < \sqrt{n}h} |f(x) - f(y)|. \tag{62}$$

Funktio $(y,T) \mapsto \phi(x-y-T)\psi(T)$ on tasaisesti jatkuva molempien muuttujien suhteen ja kompaktikantajainen. Laittamalla $f(T) = \phi(x-y-T)\psi(T)$ edelliseen estimaattiin ja ottamalla supremum y suhteen nähdään, että

$$\lim_{h\to 0} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \Big| \int \phi(x-y-T)\psi(T)dT - \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \phi(x-y-hk)\psi(hk)h^n \Big| = 0. \quad (63)$$

Derivaatatkin suppenevat tasaisesti, sillä $\partial(\phi * \psi) = (\partial\phi) * \psi$ ja summan tasaisen suppenemisen johdosta se voidaan derivoida termeittäin. Näiden huomioiden jälkeen päädymme kaavaan (63), jossa ϕ on korvattu funktiolla $\partial\phi$. Siispä derivaatatkin suppenevat tasaisesti, joten suppeneminen tapahtuu testifunktioiden avaruudessa.

Distribuutioiden jonojatkuvuuden perusteella voimme jatkaa yhtälöketjua (61) seuraavalla tavalla

$$\begin{aligned}
&= \big\langle u, \lim_{h\to 0} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \phi(x - \cdot_u - hk)\psi(hk)h^n \big\rangle \\
&= \lim_{h\to 0} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \psi(hk)\big\langle u, \phi(x - \cdot_u - hk)\big\rangle h^n \\
&= \lim_{h\to 0} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \psi(hk)\, u * \phi\,(x-hk)h^n \qquad (64)\\
&= \int \psi(T)\, u * \phi\,(x-T)dT = \int \psi(x-T)\, u * \phi\,(T)dT \\
&= (u * \phi) * \psi\,(x),
\end{aligned}$$

sillä kuvaus $T \mapsto \psi(T)\, u * \phi\,(x-T)$ on tasaisesti jatkuva ja kompaktisti kannatettu. □

Tarvitsemme vielä konvoluutiolle jatkuvuuslauseen, jotta voitaisiin myöhemmin osoittaa $u * v$ distribuutioksi, kun v on kompaktikantajainen.

Lause 3.7.7. *Olkoon $(\phi_l) \subset C_0^\infty$ jono nollaan suppenevia testifunktioita ja $u \in \mathscr{D}'$ kompaktikantajainen. Tällöin $u * \phi_l \longrightarrow 0$ testifunktioiden avaruudessa.*

Todistus. Lauseiden 3.7.4 ja 3.7.5 perusteella $(u * \phi_l)$ on jono kompaktikantajaisia sileitä funktioita, siis testifunktioita. Tarkistetaan, että se suppenee nollaan.

Koska $\phi_l \longrightarrow 0$, niin on olemassa kompakti $K \subset \mathbb{R}^n$, johon kaikkien ϕ_l kantajat sisältyvät. Jälkimmäisen lauseen perusteella siis $\mathrm{supp}(u * \phi_l) \subset \mathrm{supp}(u) + K$, joka on kompakti.

Olkoon $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multi-indeksi. Tällöin

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha (u * \phi_l)(x)| &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u * (\partial^\alpha \phi_l)(x)| \\
&= \sup_{x \in \operatorname{supp}(u)+K} |u * (\partial^\alpha \phi_l)(x)| \qquad (65)\\
&= |u * (\partial^\alpha \phi_l)(x_l)| = |\langle u, \partial^\alpha \phi_l(x_l - \cdot)\rangle|,
\end{aligned}$$

missä $x_l \in \operatorname{supp}(u) + K$ antaa maksimin kompaktisti kannatetulle ja jatkuvalle funktiolle $|u * \partial^\alpha \phi_l|$. Jotta saadaan (65) suppenemaan nollaan, kun $l \longrightarrow 0$, riittää osoittaa, että testifunktioiden avaruudessa $\partial^\alpha \phi_l(x_l - \cdot) \longrightarrow 0$.

Koska $\operatorname{supp}(\phi_l) \subset K$ ja $x_l \in \operatorname{supp}(u) + K$, niin $\operatorname{supp}(\partial^\alpha \phi_l(x_l - \cdot)) \subset \operatorname{supp}(u) + K - K$ kaikilla l. Tämä on edelleen kompakti joukko, eikä se riipu indeksistä l. Enää pitää todistaa derivaattojen tasainen suppeneminen. Olkoon β multi-indeksi. Nyt

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} |\partial^\beta \partial^\alpha \phi_l(x_l - y)| = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |\partial^\beta \partial^\alpha \phi_l(y)| \longrightarrow 0, \qquad (66)$$

sillä $\partial^\alpha \phi_l \longrightarrow 0$ oletuksen $\phi_l \longrightarrow 0$ mukaan. $\square$

Nyt on mahdollista määritellä, mitä $u * v$ on, mikäli v on kompaktikantajainen. Voimme sanoa, että $u * v$ on sellainen distribuutio, että kaikilla testifunktioilla pätee $(u * v) * \phi = u * (v * \phi)$. Kaavan oikea puoli on korrekti, sillä $v * \phi$ on äärettömän monta kertaa derivoituva ja kompaktikantajainen, eli se on testifunktio. Tämä ei onnistu vielä, mikäli u on kompaktikantajainen, mutta v ei ole.

Tilanteen voisi korjata, mikäli distribuution u tulkitsisi funktionaaliksi $C^\infty \to \mathbb{C}$. Emme tee sitä tässä, sillä pitäisi todistaa yksikäsitteisyyslauseita ja määritellä sileiden funktioiden suppeneminen. Näiden tulosten jälkeen pätisi $u * v = v * u$, mikäli u tai v olisi kompaktikantajainen. Voisimme sen sijaan määritellä distribuution $u * v$ suoraan kaavalla $u * v := v * u$, kun u on kompaktikantajainen.

Lause 3.7.8. *Olkoot $u, v \in \mathscr{D}'$ ja v kompaktikantajainen. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen distribuutio W, jolle $W * \phi = u * (v * \phi)$ kaikilla testifunktioilla $\phi \in C_0^\infty$.*

Todistus. Todistetaan aluksi yksikäsitteisyys. Olkoot W ja W' lauseen toteuttavia distribuutioita. Siis kaikilla $\phi \in C_0^\infty$ pätee

$$\begin{aligned}
W * \phi &= u * (v * \phi) \\
W' * \phi &= u * (v * \phi),
\end{aligned}$$

joten

$$0 = (W - W') * \phi = \langle W - W', \phi(x - \cdot)\rangle, \tag{67}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Siispä $\langle W - W', \phi\rangle = 0$ kaikilla testifunktioilla ϕ, joten $W = W'$.

Testifunktioiden ja distribuutioiden välinen konvoluutio määriteltiin muotoa $\langle u, \phi\rangle$ olevan lausekkeen avulla. Voi myös tehdä toisinpäin, eli voimme määritellä, mitä $\langle W, \phi\rangle$ on konvoluution avulla. On selvästi totta, että $\langle u, \phi\rangle = u * (\phi(-\cdot))\,(0)$ distribuutioilla u ja testifunktioilla ϕ.

Olkoon siis $\langle W, \phi\rangle = W*(\phi(-\cdot))\,(0) := u*\big(v*(\phi(-\cdot))\big)\,(0)$. Tämä on hyvin määritelty (lauseet 3.7.4 ja 3.7.5) ja lineaarinen testifunktioiden ϕ suhteen. Riittää siis todistaa, että W on jonojatkuva ja että $W * \phi = u * (v * \phi)$.

Aluksi konvoluutioväite. Olkoon $\phi \in C_0^\infty$ mielivaltainen ja $x \in \mathbb{R}^n$. Nyt

$$\begin{aligned} W * \phi\,(x) &= \langle W, \phi(x - \cdot)\rangle = u * \big(v * (\phi(x + \cdot))\big)\,(0) \\ &= \big\langle u, \big(v * (\phi(x + \cdot_v))\big)(-\cdot_u)\big\rangle. \end{aligned} \tag{68}$$

Sievennetään sisempi lauseke. Olkoon $y \in \mathbb{R}^n$ ja sijoitetaan se uloimman pisteen paikalle

$$v * \big(\phi(x + \cdot_v)\big)(-y) = \langle v, \phi(x - y - \cdot_v)\rangle = v * \phi\,(x - y). \tag{69}$$

Voimme nyt jatkaa laskua (68)

$$W * \phi\,(x) = \langle u, v * \phi\,(x - \cdot_u)\rangle = u * (v * \phi)\,(x), \tag{70}$$

joten $W * \phi = u * (v * \phi)$, kuten haluttiin.

Seuraavaksi jatkuvuus. Olkoon $(\phi_l) \subset C_0^\infty$ jono nollaan suppenevia testifunktioita. Tällöin $\phi_l(-\cdot) \longrightarrow 0$. Lauseen 3.7.7 mukaan $v * (\phi_l(-\cdot)) \longrightarrow 0$, josta seuraa distribuution u jonojatkuvuuden nojalla $\langle W, \phi_l\rangle = u * \big(v * (\phi_l(-\cdot))\big)\,(0) = \big\langle u, v * (\phi_l(-\cdot_v))\,(-\cdot_u)\big\rangle \longrightarrow 0$. Siis W on jonojatkuva. $\square$

Määritelmä 3.7.9. Olkoot $u, v \in \mathscr{D}'$ ja v kompaktikantajainen. Näiden *konvoluutio*, $u*v$, on se yksikäsitteinen distribuutio, jolla $(u*v)*\phi = u*(v*\phi)$ kaikilla testifunktioilla $\phi \in C_0^\infty$.

Olemme nyt määritelleet kahden distribuution välisen konvoluution. Ei vielä ole varmaa, antaako se saman tuloksen, kuin funktioiden välinen konvoluutio. Esimerkiksi $u * \phi$ voidaan tulkita distribuution ja testifunktion väliseksi konvoluutioksi tai kahden distribuution väliseksi. Kummastakin saadaan sama tulos:

Lause 3.7.10. *Olkoon $u \in \mathscr{D}'$ distribuutio ja $\phi \in C_0^\infty$ testifunktio. Tällöin $u*\phi$ distribuutioiden konvoluutiona antaa saman tuloksen, kuin distribuutioksi tulkittu distribuution ja testifunktion välinen konvoluutio $u * \phi$.*

Todistus. Merkitsemme selkeyden vuoksi kahden distribuution välistä konvoluutiota merkillä $*_D$. Haluamme siis todistaa, että distribuutioiksi tulkittuna on

$$u *_D \phi = u * \phi. \tag{71}$$

Määritelmän mukaan $u *_D \phi$ on se yksikäsitteinen distribuutio, jolle kaikilla testifunktioilla ψ pätee $(u *_D \phi) * \psi = u * (\phi * \psi)$. Tässä $*$ on kaikissa kohdissa distribuution ja testifunktion välinen konvoluutio. Lauseen 3.7.6 perusteella myös $(u * \phi) * \psi = u * (\phi * \psi)$. Joten $u *_D \phi = u * \phi$. □

Myös distribuutioiden konvoluutiolle pätee tavanomaiset derivointikaavaat.

Lause 3.7.11. *Olkoot $u, v \in \mathscr{D}'$, v kompaktikantajainen ja $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multi-indeksi. Tällöin $\partial^\alpha (u * v) = \partial^\alpha u * v = u * \partial^\alpha v$.*

Todistus. Tämä seuraa distribuution ja testifunktion konvoluution vastaavasta ominaisuudesta (lause 3.7.4). Lisäksi pitää käyttää konvoluution $u * v$ määritelmää ja tietoa, että jos $U * \phi = V * \phi$ kaikilla testifunktioilla, niin $U = V$. Olkoon $\phi \in C_0^\infty$, jolloin

$$\begin{aligned} \partial^\alpha (u * v) * \phi &= (u * v) * \partial^\alpha \phi = u * (v * \partial^\alpha \phi) \\ &= u * (\partial^\alpha v * \phi) = (u * \partial^\alpha v) * \phi, \end{aligned} \tag{72}$$

ja

$$\begin{aligned} \partial^\alpha (u * v) * \phi &= (u * v) * \partial^\alpha \phi = u * (v * \partial^\alpha \phi) \\ &= u * \partial^\alpha (v * \phi) = \partial^\alpha u * (v * \phi) \\ &= (\partial^\alpha u * v) * \phi, \end{aligned} \tag{73}$$

sillä $v * \phi$ on testifunktio. □

Lasketaan seuraavaksi hyödyllinen konvoluutio. Tämä tulos ei päde millekään klassiselle funktiolle, vaan on Diracin deltafunktion tyypillinen ominaisuus.

Lause 3.7.12. *Olkoon u distribuutio. Tällöin $u * \delta_0 = u$ ja lisäksi $\delta_0 * u = u$, mikäli u on kompaktikantajainen.*

Todistus. Olkoon $\phi \in C_0^\infty$. Tällöin

$$(u * \delta_0) * \phi := u * (\delta_0 * \phi). \tag{74}$$

Pätee $\delta_0 * \phi\,(x) = \langle \delta_0, \phi(x - \cdot) \rangle = \phi(x - 0) = \phi(x)$, joten

$$(u * \delta_0) * \phi = u * \phi, \tag{75}$$

eli $u * \delta_0 = u$.

Toinen väite seuraa samantapaisella päättelyllä:

$$(\delta_0 * u) * \phi\,(x) = \delta_0 * (u * \phi)\,(x) = \langle \delta_0, u * \phi\,(x - \cdot) \rangle = u * \phi\,(x), \tag{76}$$

joten $\delta_0 * u = u$. □

Huomautus 3.7.13. Tässä ei oikeasti tarvitsisi olettaa, että u on kompaktikantajainen, sillä δ_0 on. Emme kuitenkaan ole määritelleet konvoluutiota, kun jälkimmäisen tekijän kantaja ei ole kompakti.

4 Sovelluksia

Nyt on käsitelty distribuutioiden perusteet. Kaiken tämän teorian jälkeen on hyvä "palata maan pinnalle" ja tarkistaa, miksi sitä lähdettiin kehittämään. Pääasiallinen syy oli se, että usein fysikaalisissa differentiaaliyhtälöissä haluttiin tulkita differentioitumaton funktio ratkaisuksi. Muita syitä olivat halu käyttää tehokasta kalkyyliä ja saada lisätietoa tavallisista ratkaisuista. Esimerkiksi jos todistetaan, että differentiaaliyhtälöllä on yksikäsitteinen distribuutioratkaisu, niin sillä voi olla enintään yksi L^1_{loc}-ratkaisu.

4.1 Aaltoyhtälön distribuutioratkaisut

Todistetaan, että mikäli f ja g ovat jatkuvia, niin jatkuva, mutta ei välttämättä derivoituva funktio $u(x,t) = f(x+t)+g(x-t)$ toteuttaa aaltoyhtälön

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{77}$$

distribuutiomielessä. Tämä palautuu sen todistamiseen, että yhtälö toteutuu *heikosti.*

Olkoon siis $u(x,t) = f(x+t) + g(x-t)$. Todistetaan, että $\langle \partial_t^2 u, \phi\rangle = \langle \partial_x^2 u, \phi\rangle$ kaikilla testifunktioilla ϕ. Olkoon $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, jolloin

$$\begin{aligned} \langle \partial_t^2 u - \partial_x^2 u, \phi\rangle &= \langle u, \partial_t^2\phi - \partial_x^2\phi\rangle \\ &= \iint u(x,t)\big(\partial_t^2\phi(x,t) - \partial_x^2\phi(x,t)\big)\,dxdt \end{aligned} \tag{78}$$

Tehdään muuttujanvaihto $\xi = x+t, \eta = x-t$ ja merkitään $\Phi(\xi,\eta) = \phi\big((\xi+\eta)/2, (\xi-\eta)/2\big)$ tai toisinpäin $\phi(x,t) = \Phi(x+t, x-t)$. Toisen asteen osittaisderivaatoille saadaan kaavat

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}(x,t) = \Big(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} - 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}\Big)(x+t, x-t), \tag{79}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(x,t) = \Big(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}\Big)(x+t, x-t). \tag{80}$$

Voimme siis jatkaa yhtälöketjua (78)

$$
\begin{aligned}
&= -4 \iint u(x,t) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta}(x+t, x-t)\, dxdt \\
&= -4 \iint u\Big(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\Big) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta}(\xi,\eta) \begin{vmatrix} \partial_\xi x & \partial_\eta x \\ \partial_\xi t & \partial_\eta t \end{vmatrix} \, d\xi d\eta \\
&= 2 \iint u\Big(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\Big) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta}(\xi,\eta)\, d\xi d\eta \\
&= 2 \iint f(\xi) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta}(\xi,\eta)\, d\xi d\eta + 2 \iint g(\eta) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta}(\xi,\eta)\, d\xi d\eta \\
&= 2 \int f(\xi) \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta \partial \xi}(\xi,\eta)\, d\eta d\xi + 2 \int g(\eta) \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta}(\xi,\eta)\, d\xi d\eta \\
&= 2 \int f(\xi) \Big/_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}(\xi,\eta)\, d\xi + 2 \int g(\eta) \Big/_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}(\xi,\eta)\, d\eta = 0,
\end{aligned}
\tag{81}
$$

sillä funktion Φ kantaja on kompakti, minkä vuoksi sijoitustermit ovat nollia.

4.2 Differentiaaliyhtälön perusratkaisu

Eräs differentiaaliyhtälöissä hyödyllinen työkalu on niin sanottu *perusratkaisu*. Sen avulla voidaan ratkaista muotoa $L(u) = f$ oleva yhtälö, missä f on annettu funktio tai distribuutio ja L on lineaarinen vakiokertoiminen differentiaalioperaattori.

Määritelmä 4.2.1. Olkoon L lineaarinen differentiaalioperaattori. Jos E on sellainen distribuutio, että $L(E) = \delta_0$, niin E on operaattorin L *perusratkaisu*.

Tämän hyöty käy ilmi, kun perusratkaisu konvoloidaan toisen distribuution kanssa. Näin saadaan ratkaistuksi epähomogeeninen differentiaaliyhtälö.

Lause 4.2.2. *Olkoon L lineaarinen vakiokertoiminen differentiaalioperaattori, $L(u) = \sum_{|\alpha|<k} c_\alpha \partial^\alpha u$. Jos E on sen perusratkaisu ja $f \in \mathscr{D}'$ kompaktikantajainen, niin $L(E * f) = f$.*

Todistus. Kirjoitetaan auki todistettavan yhtälön vasen puoli. Se on hyvin määritelty, sillä f on kompaktikantajainen.

$$
\begin{aligned}
L(E * f) &= \sum_{|\alpha|<k} c_\alpha \partial^\alpha (E * f) = \sum_{|\alpha|<k} c_\alpha \partial^\alpha E * f \\
&= \Big(\sum_{|\alpha|<k} c_\alpha \partial^\alpha E \Big) * f = L(E) * f \\
&= \delta_0 * f = f,
\end{aligned}
\tag{82}
$$

sillä derivaatan voi siirtää konvoloitavaan lauseen 3.7.11 perusteella ja $\delta_0 * f = f$ lauseen 3.7.12 perusteella. □

Esimerkki 4.2.3. Operaattorin $L(u) = u'' - u$ perusratkaisu on $E = -e^{-|\cdot|}/2 = -\frac{1}{2}\big(He^{-\cdot} + (1-H)e^{\cdot}\big)$, kun avaruutena on $\mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
L(E) &= e^{-|\cdot|}/2 - 1/2\partial^2\big(He^{-\cdot} + (1-H)e^{\cdot}\big) \\
&= e^{-|\cdot|}/2 - 1/2\partial\big(\delta_0 e^{-\cdot} - He^{-\cdot} - \delta_0 e^{\cdot} + (1-H)e^{\cdot}\big) \\
&= e^{-|\cdot|}/2 - 1/2\partial\big(-He^{-\cdot} + (1-H)e^{\cdot}\big) \\
&= e^{-|\cdot|}/2 - 1/2\big(-\delta_0 e^{-\cdot} + He^{-\cdot} - \delta_0 e^{\cdot} + (1-H)e^{\cdot}\big) \\
&= e^{-|\cdot|}/2 - 1/2(e^{-|\cdot|} - 2\delta_0) = \delta_0,
\end{aligned} \tag{83}
$$

sillä $\delta_0 g(\cdot) = \delta_0 g(0)$ jos g on sileä funktio. Mikäli $f \in C_0^0$ on esimerkiksi kompaktikantajainen jatkuva funktio, niin yhtälölle $u'' - u = f$ saadaan heikko ratkaisu

$$u(x) = -\frac{1}{2}\int e^{-|x-y|} f(y)\,dy. \tag{84}$$

4.3 Distribuutioista funktioihin

Vaikka distribuutiot muodostavat hienon oman teorian, voi niitä käyttämällä saada myös klassisia tuloksia. Tyypillisiä esimerkkejä tällaisista ovat muotoa "mikäli u toteuttaa differentiaaliyhtälön $P(u) = 0$, niin $u \in C^a(X)$" olevat lauseet. Seuraavat kaksi lausetta ovat olleellisesti ottaen peräisin lähteestä [Hörmander I].

Lause 4.3.1. *Olkoon $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Tällöin jos $u' = 0$, niin u on vakio.*

Todistus. Tässä todistuksessa on sama ajatus, kuin α-kertaisten integraalien olemassaolon todistuksessa. Tiedämme, että $\langle u, \phi' \rangle = 0$ kaikilla testifunktioilla ϕ, mutta kaikkia testifunktioita ei voi esittää toisen derivaattana. Olkoon nyt $g \in C_0^\infty$, $\int g(x)dx = 1$. Tällöin jos ϕ on testifunktio, niin

$$\phi(x) = \psi'(x) + g(x)\int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)dy, \tag{85}$$

missä

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(y)dy - \int_{-\infty}^{x} g(y)dy \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)dy \tag{86}$$

on myös testifunktio. Tämän jälkeen voimme laskea, että

$$
\begin{aligned}
\langle u, \phi \rangle &= \langle u, \psi' + g\int \phi(y)dy \rangle = \langle u, \psi' \rangle + \int \langle u, g \rangle \phi(y)dy \\
&= \big\langle \langle u, g \rangle, \phi \big\rangle,
\end{aligned} \tag{87}
$$

joten $u = \langle u, g \rangle$ eli u on vakio. $\square$

Seuraus 4.3.2. *Jos $u \in \mathscr{D}'$, $a \in C^\infty$, $f \in C^k$ ja $u' + au = f$, niin $u \in C^{k+1}$.*

Todistus. Olkoon $\mu = \exp(A)$, missä $A(x) = \int_{-\infty}^{x} a(t)dt$. Koska μ on sileä, sillä voidaan kertoa. Saamme yhtälön $\mu f = \mu u' + \mu a u = (\mu u)'$, missä $\mu f \in C^k$ edelleen. Siispä on olemassa $F \in C^{k+1}$, jolla $F' = \mu f$. Nyt

$$(F - \mu u)' = F' - (\mu u)' = \mu f - (\mu u' + \mu a u) = 0, \tag{88}$$

joten edellisen lauseen nojalla $u = (C + F)\exp(-A)$ jollakin vakiolla C. Siispä $u \in C^{k+1}$. $\square$

Tällaisia tuloksia on paljon. Niiden todistaminen muuttuu paljon vaikeammaksi, kun avaruus on useampiulotteinen eikä välttämättä ole koko $\mathbb{R}^n$.

5 Fourier-muunnos distribuutioille

Yksi distribuutioteorian vahvuuksista on se, että sen avulla Fourier-muunnos voidaan laajentaa erittäin suurelle luokalle funktioita ja distribuutioita. Tässä määritellään aluksi nopeasti vähenevien testifunktioiden avaruus, jota myös kutsutaan Schwartzin avaruudeksi. Tämä avaruus on invariantti Fourier-muunnoksen suhteen.

Seuraavaksi voimme määritellä temperoidut distribuutiot Schwartzin avaruuden jonojatkuvina funktionaaleina. Todistamme myös, että ne voidaan tulkita distribuutioiksi. Sen takia niitä kutsutaan temperoiduiksi distribuutioiksi. Tämän jälkeen voimme määritellä niiden Fourier-muunnoksen kaavalla $\langle \hat{u}, \phi \rangle = \langle u, \hat{\phi} \rangle$.

5.1 Schwartzin avaruus

Fourier-muunnos $f \mapsto \hat{f}$ määritellään yleensä kaavalla

$$\hat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx, \tag{89}$$

missä $x, \xi \in \mathbb{R}^n$. Suuri ongelma on se, että integraali ei suppene kaikilla funktioilla joihin Fourier-muunnosta haluttaisiin soveltaa. Kaavan integraali suppenee ainakin, kun $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Se voidaan laajentaa Hilbert-avaruuksien tekniikoin $L^2(\mathbb{R}^n)$-funktioille. Tässä ollaan vielä kaukana määrittelemästä sitä distribuutioille tai edes funktioille, jotka eivät lähesty nollaa äärettömyydessä.

Huomautus 5.1.1. Fourier-muunnoksen yhteydessä käytämme koko avaruutta, $X = \mathbb{R}^n$.

Jos $f \in L^1$ ja $\phi \in C_0^\infty$, niin

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}, \phi \rangle = \int \hat{f}(\xi)\phi(\xi) d\xi &= \iint f(x) e^{-ix\cdot\xi} \phi(\xi) dx d\xi \\ = \iint f(x) e^{-ix\cdot\xi}\phi(\xi) d\xi dx &= \int f(x)\hat{\phi}(x) dx = \langle f, \hat{\phi} \rangle \end{aligned} \tag{90}$$

Fubinin lauseen nojalla, sillä integraali suppenee itseisesti. Tämä antaisi aiheen määritellä muunnos aluksi pelkästään testifunktioille, jonka jälkeen distribuution muunnos määriteltäisiin kaavalla (90). Tämä ei toimi, sillä $\hat{\phi}$ ei ole välttämättä kompaktikantajainen.

On kuitenkin olemassa avaruus, jossa Fourier-muunnos on määritelty, joka sisältää testifunktiot ja on invariantti muunnoksen suhteen. Sitä kutsutaan Schwartzin avaruudeksi.

Määritelmä 5.1.2. *Schwartzin avaruus,* $\mathscr{S} \subset C^\infty$, sisältää ne funktiot ϕ, jotka toteuttavat ehdon

$$\|\phi\|_{\alpha,\beta} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| < \infty, \tag{91}$$

kaikilla multi-indekseillä $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Sanotaan, että jono $(\phi_l) \subset \mathscr{S}$ *suppenee kohti* $\phi \in \mathscr{S}$, mikäli

$$\lim_{l\to\infty} \|\phi - \phi_l\|_{\alpha,\beta} \longrightarrow 0 \tag{92}$$

kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

Huomautus 5.1.3. Schwartzin avaruuden funktioita kutsutaan myös *nopeasti väheneviksi testifunktioiksi.*

Lause 5.1.4. *$\mathscr{S}$ on vektoriavaruus ja se on suljettu polynomilla kertomisen ja derivoinnin suhteen. Lisäksi jos $\phi \in \mathscr{S}$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, niin*

$$x^\alpha \partial^\beta \phi(x) \longrightarrow 0, \text{ kun } |x| \longrightarrow \infty. \tag{93}$$

Todistus. Olkoot $\phi, \psi \in \mathscr{S}$, $a, b \in \mathbb{C}$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Tällöin $\|a\phi + b\psi\|_{\alpha,\beta} \leq |a|\|\phi\|_{\alpha,\beta} + |b|\|\psi\|_{\alpha,\beta} < \infty$, joten $a\phi + b\psi \in \mathscr{S}$. Siispä $\mathscr{S}$ on vektoriavaruus.

Olkoot $\phi \in \mathscr{S}$ ja $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$ multi-indeksejä. Nyt

$$\|\partial^\gamma \phi\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^{\beta+\gamma} \phi(x)| = \|\partial^\gamma \phi\|_{\alpha,\beta+\gamma} < \infty, \tag{94}$$

joten $\partial^\gamma \phi \in \mathscr{S}$.

Olkoot $\phi \in \mathscr{S}$, $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ polynomi ja $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ multi-indeksejä. Nyt $\|P\phi\|_{\alpha,\beta} = \sup |x^\alpha \partial^\beta (P(x)\phi(x))|$, missä $\partial^\beta(P(x)\phi(x))$ on äärellinen summa, jonka termit ovat muotoa $a_k x^{\sigma_k} \partial^{\gamma_k} \phi(x)$, missä σ_k ja γ_k ovat termin indeksistä k riippuvia multi-indeksejä. Näiden kaikkien supremum on äärellinen, sillä edellisen kappaleen nojalla $\partial^{\gamma_k}\phi \in \mathscr{S}$. Siispä $P\phi \in \mathscr{S}$.

Olkoot $\phi \in \mathscr{S}$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Olkoon $\epsilon > 0$. Oletetaan, että olisi olemassa jono $(x_l) \subset \mathbb{R}^n$, $|x_l| > l$, jolla $\left|x_l^\alpha \partial^\beta \phi(x_l)\right| > \epsilon$. Tästä seuraisi

$$\sum_{j=1}^n \|\phi\|_{\alpha+2e_j,\beta} \geq \sum_{j=1}^n \left|{x_l}^\alpha \partial^\beta \phi(x_l) {x_l}_j^2\right| > \epsilon \sum_{j=1}^n \left|{x_l}_j^2\right| = \epsilon |x_l|^2 > \epsilon l^2 \longrightarrow \infty, \tag{95}$$

mikä on mahdotonta, sillä vasemmanpuoleisen summan jokainen termi on äärellinen eikä riipu indeksistä l. Siispä $x^\alpha \partial^\beta \phi(x) \longrightarrow 0$, kun $|x| \longrightarrow \infty$. $\square$

Lause 5.1.5. *$C_0^\infty \subset \mathscr{S}$ on tiheä osajoukko ja jos $(\phi_l) \subset C_0^\infty$, niin*

$$\phi_l \xrightarrow{C_0^\infty} 0 \iff \phi_l \xrightarrow{\mathscr{S}} 0. \tag{96}$$

Todistus. Olkoon $\phi \in C_0^\infty$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Tällöin myös $x^\alpha \partial^\beta \phi \in C_0^\infty$, joten $\sup_x |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| < \infty$. Siispä $\phi \in \mathscr{S}$.

Olkoon $\phi \in \mathscr{S}$ ja $\psi \in C_0^\infty$ sellainen, että $\psi(x) = 1$, kun $|x| \leq 1$. Tällainen on olemassa lauseen 3.1.5 nojalla. Olkoon $R \geq 1$ ja merkitään $\psi_R(x) = \psi(x/R)$, jolloin $\psi_R(x) = 1$, jos $|x| \leq R$. Merkitään $M_{\alpha,R} = \sup |\partial^\alpha (1 - \psi_R(x))|$. Se on tasaisesti rajoitettu luvun R suhteen: $M_{\alpha,R} \leq 1 + \sup |\partial^\alpha (\psi(\frac{x}{R}))| = 1 + \sup |R^{-|\alpha|} (\partial^\alpha \psi)(\frac{x}{R})| \leq 1 + \sup |\partial^\alpha \psi(x)| < \infty$.

Nyt $\psi_R \phi \in C_0^\infty$ ja multi-indekseillä α, β on

$$\begin{aligned} \|\phi - \psi_R \phi\|_{\alpha,\beta} &= \sup_x \Big| x^\alpha \sum_{\gamma \leq \beta} \frac{\beta!}{\gamma!(\beta-\gamma)!} \partial^{\beta-\gamma} \big(1 - \psi_R(x)\big) \partial^\gamma \phi(x) \Big| \\ &\leq C_\beta \sum_{\gamma \leq \beta} M_{\beta-\gamma,R} \sup_{|x|>R} \big| x^\alpha \partial^\gamma \phi(x) \big| \longrightarrow 0, \end{aligned} \tag{97}$$

kun $R \longrightarrow \infty$ lauseen 5.1.4 viimeisen väitteen ja kertoimien $M_{\beta-\gamma,R}$ luvusta R riippumattoman rajan olemassaolon nojalla. Tässä C_β on kertoimien $\frac{\beta!}{\gamma!(\beta-\gamma)!}$ maksimi.

Olkoon $(\phi_l) \subset C_0^\infty$ nollaan suppeneva jono testifunktioita ja $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Tällöin on olemassa $M > 0$ jolla $\phi_l(x) = 0$, mikäli $|x| > M$. Nyt

$$\|\phi_l\|_{\alpha,\beta} = \sup_x \big| x^\alpha \partial^\beta \phi_l(x) \big| \leq M^{|\alpha|} \sup_x \big| \partial^\beta \phi_l(x) \big| \longrightarrow 0, \tag{98}$$

kun $l \longrightarrow 0$ testifunktioiden suppenemisen määritelmän 3.1.6 nojalla. Toinen suunta tulee yhtä helposti. Riittää huomata, että $\|\phi_l\|_{0,\beta} \longrightarrow 0$ kaikilla multi-indekseillä β. $\square$

Lemma 5.1.6. *$\mathscr{S} \subset L^1$, eli jos $\phi \in \mathscr{S}$, niin*

$$\int |\phi(x)| dx < \infty. \tag{99}$$

Lisäksi jos $(\phi_l) \subset \mathscr{S}$ ja $\phi_l \longrightarrow 0$, niin $\|\phi_l\|_1 \longrightarrow 0$.

Todistus. Olkoon $\phi \in \mathscr{S}$. Se on sileänä funktiona mitallinen. Lisäksi

$$\begin{aligned} \int |\phi(x)| dx &\leq \int \big(1 + |x|^2\big)^n |\phi(x)| \big(1 + |x|^2\big)^{-n} dx \\ &\leq \sup_x \big(1 + |x|^2\big)^n |\phi(x)| \int \frac{1}{(1 + |x|^2)^n} dx \\ &= \sup_x \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{n!}{\alpha!(n - |\alpha|)!} x^{2\alpha} |\phi(x)| \int \frac{1}{(1 + |x|^2)^n} dx \\ &\leq C_n \sum_{|\alpha| \leq n} \|\phi\|_{2\alpha,0} < \infty, \end{aligned} \tag{100}$$

missä $C_n < \infty$ on termien kertoimien maksimin ja integraalin tulo. Jos $\phi_l \longrightarrow 0$, niin $\|\phi_l\|_{\alpha,\beta} \longrightarrow 0$ kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, joten $\|\phi_l\|_1 \longrightarrow 0$. $\square$

Seuraavaksi määrittelemme Fourier-muunnoksen Schwartzin avaruuteen ja osoitamme, että se on jatkuva lineaarikuvaus. Lisäksi näytämme pari laskukaavaa.

Määritelmä 5.1.7. *Fourier-muunnos* $\mathscr{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}, \phi \mapsto \hat{\phi}$ määritellään kaavalla

$$\hat{\phi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) e^{-ix\cdot\xi} dx. \tag{101}$$

Lause 5.1.8. *Määritelmä 5.1.7 on kunnollinen ja $\mathscr{F}$ on jatkuva lineaarikuvaus.*

Todistus. Olkoon $\phi \in \mathscr{S}$. Osoitetaan, että $\hat{\phi} \in \mathscr{S}$. Olkoot $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Lemman 5.1.6 ja dominoidun konvergenssin lauseen nojalla

$$\partial^\beta \hat{\phi}(\xi) = \int \phi(x)(-ix)^\beta e^{-ix\cdot\xi} dx < \infty, \tag{102}$$

sillä $\cdot^\beta \phi(\cdot) \in \mathscr{S} \subset L^1$. Siispä $\hat{\phi} \in C^\infty$. Schwartzin normille saadaan arvio

$$\begin{aligned}
\|\hat{\phi}\|_{\alpha,\beta} &= \sup_\xi |\xi^\alpha \partial^\beta \hat{\phi}(\xi)| = \sup_\xi \left| \int \phi(x) \xi^\alpha (-ix)^\beta e^{-ix\cdot\xi} dx \right| \\
&= \sup_\xi \left| \int \phi(x) x^\beta \partial_x^\alpha \big(e^{-ix\cdot\xi}\big) dx \right| = \sup_\xi \left| \int \partial_x^\alpha \big(\phi(x) x^\beta\big) e^{-ix\cdot\xi} dx \right| \\
&\leq \int \left| \partial_x^\alpha \big(\phi(x) x^\beta\big) \right| dx < \infty,
\end{aligned} \tag{103}$$

sillä lauseen 5.1.4 mukaan $x \mapsto \phi(x) x^\beta e^{-ix\cdot}$ on nopeasti vähenevä testifunktio, jolloin osittaisintegroinnin sijoitustermit häviävät. Viimeisin epäyhtälö seuraa siitä, että $\partial^\alpha(\phi(\cdot)\cdot^\beta) \in \mathscr{S} \subset L^1$ lauseen 5.1.4 ja lemman 5.1.6 nojalla. $\mathscr{F}$ on siis hyvin määritelty, joten lineaarisuus seuraa integraalin lineaarisuudesta.

Enää pitää todistaa jatkuvuus. Olkoon $(\phi_l) \subset \mathscr{S}$ jono nollaan suppenevia nopeasti väheneviä testifunktioita. Nyt voimme jatkaa kaavan (103) yhtälöitä

$$\begin{aligned}
\|\hat{\phi}_l\|_{\alpha,\beta} = \ldots &= \sup_\xi \Big| \int \big(1+|x|^2\big)^n \partial_x^\alpha \big(\phi_l(x)x^\beta\big) \frac{e^{-ix\cdot\xi}}{\big(1+|x|^2\big)^n} dx \Big| \\
&\le \sup_x \Big| \big(1+|x|^2\big)^n \partial^\alpha \big(\phi_l(x)x^\beta\big) \Big| \int \big(1+|x|^2\big)^{-n} dx \\
&\le C \sup_x \sum_{\substack{|\gamma|\le n \\ \beta\ge\delta\le\alpha}} \frac{n!}{\gamma!(n-|\gamma|)!} x^{2\gamma} \frac{\alpha!}{\delta!(\alpha-\delta)!} \frac{\beta!}{\delta!} \big| x^\delta \partial^\delta \phi_l(x) \big| \qquad (104) \\
&\le C_n \sum_{\substack{|\gamma|\le n \\ \beta\ge\delta\le\alpha}} |x^{2\gamma+\delta} \partial^\delta \phi_l(x)| = C_n \sum_{\substack{|\gamma|\le n \\ \beta\ge\delta\le\alpha}} \|\phi_l\|_{2\gamma+\delta,\delta} \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

□

Fourier-muunnos on siitä hyödyllinen, että se muuttaa derivoinnin muuttujalla kertomiseksi. Oikeastaan osittaisderivointi muuttuu monomilla $(ix)^\alpha$ kertomikseksi. Tämän takia yleensä Fourier-muunnoksen yhteydessä käytetään differentiaalioperaattoria $D = \frac{1}{i}\partial$.

Lause 5.1.9. *Olkoot $\phi \in \mathscr{S}$ ja $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Tällöin*

$$\widehat{D^\alpha \phi}(\xi) = \xi^\alpha \hat{\phi}(\xi), \qquad (105)$$

$$\widehat{(\cdot)^\alpha \phi}(\xi) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \hat{\phi}(\xi). \qquad (106)$$

Todistus. Tämä on suora lasku, sillä kaikki integraalit suppenevat, koska $\phi \in \mathscr{S}$. Ensimmäinen kaava,

$$\begin{aligned}
\widehat{D^\alpha \phi}(\xi) &= \int D^\alpha \phi(x) e^{-ix\cdot\xi} dx = (-1)^{|\alpha|} \int \phi(x) D_x^\alpha e^{-ix\cdot\xi} dx \\
&= \int \phi(x) e^{-ix\cdot\xi} \xi^\alpha dx = \xi^\alpha \hat{\phi}(\xi),
\end{aligned}$$

seuraa osittaisintegroimalla ja toinen,

$$\begin{aligned}
\widehat{(\cdot)^\alpha \phi}(\xi) &= \int x^\alpha \phi(x) e^{-ix\cdot\xi} dx = \int \frac{1}{(-i)^\alpha} \partial_\xi^\alpha \Big(\phi(x) e^{-ix\cdot\xi}\Big) dx \\
&= (-1)^\alpha D^\alpha \int \phi(x) e^{-ix\cdot\xi} dx = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \hat{\phi}(\xi),
\end{aligned}$$

seuraa dominoidun konvergenssin lauseesta. □

Kun differentiaaliyhtälöitä muutetaan algebrallisiksi yhtälöiksi, on hyvä päästä myös takaisin. Voisi olla niin, että saisimme differentiaaliyhtälön ratkaisun Fourier-muunnoksen ratkaistua, mutta olisi äärettömän monta funktiota, joilla olisi sama muunnos. Näin ei kuitenkaan ole. Fourier-muunnos on bijektio, ja sen käänteismuunnoksella on helppo kaava. Tätä ennen tarvitsemme kuitenkin pari tulosta, joiden todistaminen käänteisoperaattorin todistuksessa vain hämärtäisi koko ajatuksen.

Lemma 5.1.10. *Okoon $\phi, \psi \in \mathscr{S}$. Tällöin*

$$\int \hat{\phi}(\xi)\psi(\xi)d\xi = \int \phi(x)\hat{\psi}(x)dx. \tag{107}$$

Todistus. Koska $\phi, \psi, \hat{\phi}, \hat{\psi} \in \mathscr{S}$, niin molemmat integraalit suppenevat. Niimpä

$$\begin{aligned}\int \hat{\phi}(\xi)\psi(\xi)d\xi &= \iint \phi(x)\psi(\xi)e^{-ix\cdot\xi}dxd\xi \\ &= \iint \phi(x)\psi(\xi)e^{-i\xi\cdot x}d\xi dx = \int \phi(x)\hat{\psi}(x)dx\end{aligned} \tag{108}$$

Fubinin lauseen nojalla. □

Lemma 5.1.11. *Olkoon $\epsilon > 0$ ja $\varrho_\epsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $\varrho_\epsilon(x) = e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2|x|^2}$. Tällöin $\varrho_\epsilon \in \mathscr{S}$ ja seuraavat kaavat pitävät paikkansa:*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \varrho_\epsilon(x) = 1 \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}^n, \tag{109}$$

$$\hat{\varrho}_\epsilon(\xi) = (2\pi)^{n/2}\epsilon^{-n}e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2/\epsilon^2}. \tag{110}$$

Todistus. Todistetaan aluksi, että $\varrho_\epsilon \in \mathscr{S}$. Selvästi $\varrho_\epsilon \in C^\infty$. Olkoot $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Induktiolla nähdään, että $x^\alpha \partial^\beta e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2|x|^2} = P_{\alpha,\beta,\epsilon}(x)e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2|x|^2}$ jollakin polynomilla $P_{\alpha,\beta,\epsilon}$.

Olkoot $\gamma \in \mathbb{N}^n$ mielivaltainen ja $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Tällöin $|x_j^{\gamma_j}e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2 x_j^2}| = |x_j|^{\gamma_j}e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2 x_j^2} \geq 0$ on parillinen jatkuva funktio. Se on myös vähenevä suurilla $x_j > 0$,

$$\partial_j\big(x_j^{\gamma_j}e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2 x_j^2}\big) = \gamma_j x_j^{\gamma_j-1}e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2 x_j^2} - \epsilon^2 x_j^{\gamma_j+1}e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2 x_j^2} \leq 0 \Longleftarrow x_j \geq \sqrt{\gamma_j}/\epsilon, \tag{111}$$

joten $\sup|x_j^{\gamma_j}e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2 x_j^2}| < \infty$. Tämän perusteella

$$\left|x^\gamma e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2|x|^2}\right| = \left|x_1^{\gamma_1}e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2 x_1^2}\right| \cdots \left|x_n^{\gamma_n}e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2 x_n^2}\right| < \infty. \tag{112}$$

Polynomit ovat summia monomeista, joten kaikilla polynomeilla $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ on $\sup \left| P(x) e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2|x|^2} \right| < \infty$. Siispä $\varrho_\epsilon \in \mathscr{S}$.

Kaava (109) seuraa suoraan eksponenttifunktion jatkuvuudesta. Funktion Fourier-muunnos saadaan seuraavasta yhtälöketjusta:

$$\begin{aligned}
\int e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2|x|^2} e^{-ix\cdot\xi} dx &= \int e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2 x_1^2 - ix_1\xi_1} \cdots e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2 x_n^2 - ix_n\xi_n} dx \\
&= \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \exp\big(-\frac{1}{2}\epsilon^2 x_j^2 - ix_j\xi_j\big) dx_j \\
&= \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \exp\big(-\frac{(\epsilon x_j - i\xi_j/\epsilon)^2}{2} - \frac{1}{2}\xi_j/\epsilon^2\big) dx_j \qquad (113) \\
&= \prod_{j=1}^n e^{-\frac{1}{2}\xi_j^2/\epsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\sqrt{2}/\epsilon du \\
&= (2\pi)^{n/2}\epsilon^{-n} e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2/\epsilon^2}.
\end{aligned}$$

Muuttujanvaihto on sallittu, sillä $\exp(-u^2)$ on analyyttinen ja se lähestyy nollaa, kun u etääntyy origosta ja pysyy molempien reaaliakselin suuntaisten integroimispolkujen välissä. □

Lause 5.1.12. *Fourier-muunnos $\mathscr{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ on bijektio ja sen käänteismuunnos, $\mathscr{F}^{-1} : \hat{\phi} \mapsto \phi$, on jatkuva. Lisäksi sillä on kaava*

$$\phi(x) = (2\pi)^{-n} \int \hat{\phi}(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi. \qquad (114)$$

Todistus. Todistamme aluksi kaavan (114) tapauksessa $x = 0$. Siirron avulla päästään muihin pisteisiin. Olettaen, että kaava pätee, jatkuvuus seuraa samalla tavalla kuin lauseen 5.1.8 todistuksessa.

Lasketaan kaavan (114) oikea puoli, kun $x = 0$. Koska $\hat{\phi}, e^{-\frac{1}{2}|\cdot|^2} \in L^1$, niin dominoidun konvergenssin lauseen ja lemmojen 5.1.10 ja 5.1.11 nojalla

$$\begin{aligned}
\int \hat{\phi}(\xi) d\xi &= \int \hat{\phi}(\xi) \lim_{\epsilon\to 0} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2|\xi|^2} d\xi = \lim_{\epsilon\to 0} \int \hat{\phi}(\xi) e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2|\xi|^2} d\xi \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int \phi(x) \mathscr{F}\big(e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2|\cdot|^2}\big)(x) dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int \phi(x)(2\pi)^{n/2}\epsilon^{-n} e^{-\frac{1}{2}|x|^2/\epsilon^2} dx \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}(2\pi)^{n/2} \int \phi(\epsilon u)\epsilon^{-n} e^{-\frac{1}{2}|u|^2}\epsilon^n du = (2\pi)^{n/2} \int \lim_{\epsilon\to 0} \phi(\epsilon u) e^{-\frac{1}{2}|u|^2} du \\
&= (2\pi)^{n/2}\phi(0) \int e^{-\frac{1}{2}|u|^2} du = (2\pi)^{n/2}\phi(0) \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}|u_j|^2} du_j \\
&= (2\pi)^n \phi(0).
\end{aligned} \qquad (115)$$

Edellinen kaava todistettiin kaikille $\phi \in \mathscr{S}$, joten

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi(x-0) = (2\pi)^{-n} \int \mathscr{F}\big(\phi(x-\cdot)\big)(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \iint \phi(x-t) e^{-it\cdot\xi} dt d\xi = (2\pi)^{-n} \iint \phi(\tau) e^{-i(x-\tau)\cdot\xi} d\tau d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \iint \phi(\tau) e^{-i\tau\cdot(-\xi)} d\tau \, e^{ix\cdot(-\xi)} d\xi = (2\pi)^{-n} \int \hat{\phi}(-\xi) e^{ix\cdot(-\xi)} d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int \hat{\phi}(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi.\end{aligned} \tag{116}$$

□

Lause 5.1.13. *Olkoon $\phi \in \mathscr{S}$. Tällöin*

$$\phi(-x) = (2\pi)^{-n} \hat{\hat{\phi}}(x) \quad ja \quad \phi = (2\pi)^{-2n} \mathscr{F}^4(\phi). \tag{117}$$

Todistus. Ensimmäinen kaava saadaan parin muuttujanvaihdon ja käänteismuunnoksen (114) avulla:

$$\begin{aligned}\hat{\hat{\phi}}(x) &= \int \hat{\phi}(\xi) e^{-ix\cdot\xi} d\xi = \iint \phi(t) e^{-i(t+x)\cdot\xi} dt d\xi \\ &= \iint \phi(-\tau) e^{-i\tau\cdot(-\xi)} d\tau \, e^{-ix\cdot\xi} d\xi \\ &= \int \mathscr{F}\big(\phi(-\cdot)\big)(-\xi) e^{ix\cdot(-\xi)} d\xi \\ &= \int \mathscr{F}\big(\phi(-\cdot)\big)(\zeta) e^{ix\cdot\zeta} d\zeta = (2\pi)^n \phi(-x)\end{aligned} \tag{118}$$

Toinen kaava seuraa ensimmäisestä:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi\big(-(-x)\big) = (2\pi)^{-n} \mathscr{F}^2\big(\phi(-\cdot)\big) \\ &= (2\pi)^{-n} \mathscr{F}^2\big((2\pi)^{-n} \mathscr{F}^2(\phi)\big) = (2\pi)^{-2n} \mathscr{F}^4(\phi)\end{aligned} \tag{119}$$

□

5.2 Temperoidut distribuutiot

Nyt voimme määritellä ne distribuutiot, joille Fourier-muunnos voidaan laajentaa. Ajatuksena on käyttää kaavaa $\langle \hat{u}, \phi \rangle = \langle u, \hat{\phi} \rangle$. Siispä määrittelemme temperoidut distribuutiot Schwartzin avaruuden $\mathscr{S}$ jonojatkuvina funktionaaleina, ja todistamme, että ne voidaan samaistaa eräiden distribuutioiden kanssa.

Määritelmä 5.2.1. Kuvaus $u : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ on *temperoitu distribuutio*, mikäli se on $\mathbb{C}$-lineaarinen ja jonojatkuva. Temperoitujen distribuutioiden joukolle on merkintä $\mathscr{S}'$.

Lause 5.2.2. *$L^p \subset \mathscr{S}'$ kaikilla $1 \leq p \leq \infty$.*

Todistus. Olkoon $1 \leq p \leq \infty$ ja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tällöin myös $1 \leq q \leq \infty$. Olkoot $f \in L^p$ ja $(\phi_l) \subset \mathscr{S}$ jono nollaan suppenevia testifunktioita. Hölderin epäyhtälön nojalla[4]

$$\big|\langle f, \phi_l \rangle\big| \leq \int \big|f(x)\phi_l(x)\big| dx \leq \|f\|_p \|\phi_l\|_q, \tag{120}$$

joten riittää osoittaa, että $\|\phi_l\|_q \longrightarrow 0$. Tästä tiedosta seuraisi, että f on jonojatkuva Schwartzin avaruuden funktionaali. Jos $q = \infty$, niin $\|\phi_l\|_q = \|\phi_l\|_{0,0} \longrightarrow 0$. Olkoon siis $1 \leq q < \infty$, jolloin

$$\|\phi_l\|_q^q = \int \big|\phi_l(x)\big|^q dx \leq \int \|\phi_l\|_{0,0}^{q-1} \big|\phi_l(x)\big| dx = \|\phi_l\|_{0,0}^{q-1} \|\phi_l\|_1 \longrightarrow 0 \tag{121}$$

lauseen 5.1.6 nojalla. □

Lause 5.2.3. *Polynomiaalisesti rajoitetut sileät funktiot ovat temperoituja distribuutioita. Eli jos $f \in C^\infty$ ja on olemassa polynomi $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ jolla*

$$\big|f(x)\big| \leq \big|P(x)\big|, \tag{122}$$

niin $f \in \mathscr{S}'$.

Todistus. Olkoon f ja P kuten yllä. Olkoon lisäksi $(\phi_l) \subset \mathscr{S}$ nollaan suppeneva. Tällöin

$$\big|\langle f, \phi_l \rangle\big| \leq \int \big|f(x)\phi_l(x)\big| dx \leq \sum_{|\alpha| \leq \deg P} c_\alpha \int \big|x^\alpha \phi_l(x)\big| dx \longrightarrow 0, \tag{123}$$

koska $\|(\cdot)^\alpha \phi_l\|_{\beta,\gamma} = \|\phi_l\|_{\alpha+\beta,\gamma} \longrightarrow 0$ kaikilla $\beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$, jolloin lauseen 5.1.6 nojalla integraali $\|(\cdot)^\alpha \phi_l\|_1$ suppenee nollaan. Lineaarisuus on tämän jälkeen selvää. □

Seuraavaksi todistamme, että temperoidut distribuutiot voidaan samaistaa eräiden distribuutioiden kanssa. Koska $C_0^\infty \subset \mathscr{S}$, niin Schwartzin avaruuden funktionaalit ovat myös testifunktioiden funktionaaleja. Lauseen 5.1.5 perusteella kyseisten funktioavaruuksien topologiat ovat yhteensopivat, joten voimme upottaa $\mathscr{S}' \subset \mathscr{D}'$. Tarkemmin

[4] Merkitsemme $\|\phi\|_p := \left(\int \big|\phi(x)\big|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$.

Lause 5.2.4. *Olkoon $u \in \mathscr{S}'$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen $U \in \mathscr{D}'$, jolla $\langle U, \phi \rangle = \langle u, \phi \rangle$ kaikilla testifunktioilla $\phi \in C_0^\infty$. Lisäksi jos $v \in \mathscr{S}'$ ja $\langle u, \phi \rangle = \langle v, \phi \rangle$ kaikilla testifunktioilla $\phi \in C_0^\infty$, niin $u = v$.*

Toisin sanoen $\mathscr{S}' \subset \mathscr{D}'$ kanonisella tavalla.

Todistus. Olemassaolo: Määrittelemme $\langle U, \phi \rangle := \langle u, \phi \rangle$ kaikilla $\phi \in C_0^\infty \subset \mathscr{S}$. Se on selvästi lineaarinen ja hyvinmääritelty. Lisäksi jos $(\phi_l) \subset C_0^\infty$ suppenee kohti nollaa, niin lauseen 5.1.5 nojalla se suppenee myös kohti nollaa avaruudessa $\mathscr{S}$. Tällöin siis $\langle U, \phi_l \rangle = \langle u, \phi_l \rangle \longrightarrow 0$.

U-yksikäsitteisyys: Olkoot U ja U' kaksi lauseen toteuttavaa distribuutiota. Tällöin $\langle U - U', \phi \rangle = \langle U, \phi \rangle - \langle U', \phi \rangle = \langle u, \phi \rangle - \langle u, \phi \rangle = 0$ kaikilla testifunktioilla. Siispä $U = U'$.

u-yksikäsitteisyys: Olkoot $u, v \in \mathscr{S}$ ja $\langle u, \phi \rangle = \langle v, \phi \rangle$ kaikilla $\phi \in C_0^\infty$. Osoitamme, että $\langle u, \psi \rangle = \langle v, \psi \rangle$ kaikilla $\psi \in \mathscr{S}$. Olkoon $\psi \in \mathscr{S}$. Tällöin lauseen 5.1.5 nojalla on olemassa jono $(\phi_l) \subset C_0^\infty$, joka suppenee kohti funktiota ψ avaruudessa $\mathscr{S}$. Tällöin

$$\langle u, \psi \rangle = \lim_{l \to \infty} \langle u, \phi_l \rangle = \lim_{l \to \infty} \langle v, \phi_l \rangle = \langle v, \psi \rangle, \tag{124}$$

joten $u = v$. □

Huomautus 5.2.5. Jos halutaan tietää onko distribuutio $u \in \mathscr{D}'$ temperoitu, niin riittää tarkastaa lähestyykö $\langle u, \phi_l \rangle$ nollaa, kun $l \longrightarrow \infty$, kaikilla testifunktiojonoilla $(\phi_l) \subset C_0^\infty$, jotka lähestyvät *Schwartzin avaruudessa* nollaa.

5.3 Fourier-muunnos

Koska temperoidut distribuutiot on osoitettu hyvin määritellyiksi, voimme määritellä niiden Fourier-muunnoksen. Tämän jälkeen osoitamme, että tavanomaiset kaavat ovat yhä voimassa.

Määritelmä 5.3.1. *Fourier-muunnos*, $\mathscr{F} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$, $\mathscr{F} : u \to \hat{u}$, määritellään kaavalla

$$\langle \hat{u}, \phi \rangle = \langle u, \hat{\phi} \rangle, \tag{125}$$

missä $\phi \in \mathscr{S}$.

Huomautus 5.3.2. Jos $\psi \in \mathscr{S}$, niin $\langle \hat{\psi}, \phi \rangle = \langle \psi, \hat{\phi} \rangle$, joten tämä määritelmä on yhteensopiva avaruuden $\mathscr{S}$ Fourier-muunnoksen määritelmän 5.1.7 kanssa.

Lause 5.3.3. *Määritelmä 5.3.1 on kunnollinen.*

Todistus. Olkoot $u \in \mathscr{S}'$ ja $\phi \in \mathscr{S}$. Tällöin $\hat{\phi} \in \mathscr{S}$ lauseen 5.1.8 nojalla. Koska $u \in \mathscr{S}'$ ja $\mathscr{F}_{|\mathscr{S}}$ on jatkuva, niin kuvaus $\phi \mapsto \langle u, \hat{\phi} \rangle$ on jonojatkuva funktionaali $\mathscr{S} \to \mathbb{C}$, eli $\hat{u} \in \mathscr{S}'$. □

Lause 5.3.4. *Olkoot $u \in \mathscr{S}'$ ja $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Tällöin*

$$\widehat{D^\alpha u} = \xi^\alpha \hat{u}, \tag{126}$$
$$\widehat{x^\alpha u} = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \hat{u}. \tag{127}$$

Huomautus 5.3.5. Kirjaimella ξ merkitään usein Fourier-muunnoksen muuttujaa ja kirjaimella x muunnettavan distribuution muuttujaa. Tässä ne ovat distribuutioiden u ja $\hat{u}$ sileitä kerroinfunktioita.

Todistus. Tämä palautuu vastaavaan lauseeseen 5.1.9 avaruudessa $\mathscr{S}$. Olkoon $\phi \in \mathscr{S}$. Tällöin

$$\langle \widehat{D^\alpha u}, \phi \rangle = \langle D^\alpha u, \hat{\phi} \rangle = \langle u, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \hat{\phi} \rangle = \langle u, \widehat{(\cdot)^\alpha \phi} \rangle = \langle \xi^\alpha \hat{u}, \phi \rangle, \tag{128}$$

ja

$$\langle \widehat{x^\alpha u}, \phi \rangle = \langle x^\alpha u, \hat{\phi} \rangle = \langle u, (\cdot)^\alpha \hat{\phi} \rangle = \langle u, \widehat{D^\alpha \phi} \rangle = \langle (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \hat{u}, \phi \rangle. \tag{129}$$

□

Käänteismuunnos voidaan määritellä avaruuden $\mathscr{S}$ käänteisoperaattorin avulla. Se saadaan myös oleellisesti ottaen kahdella peräkkäisellä Fourier-muunnoksella. Otetaan tässä käyttöön merkintä $\langle \check{u}, \phi \rangle = \langle u, \phi(-\cdot) \rangle$. Koska integroituville funktioille pätee $\int f(x)\phi(-x)dx = \int f(-y)\phi(y)dy$, niin $\check{f}(x) = f(-x)$.

Lause 5.3.6. *Olkoot $u \in \mathscr{S}'$ ja $\phi \in \mathscr{S}$. Tällöin pätee*

$$\check{u} = (2\pi)^{-n} \hat{\hat{u}}, \quad u = (2\pi)^{-2n} \mathscr{F}^4(u), \quad \langle u, \phi \rangle = \langle \hat{u}, \mathscr{F}^{-1}(\phi) \rangle \tag{130}$$

Todistus. Nämä seuraavat pääosin avaruuden $\mathscr{S}$ Fourier-muunnoksen vastaavista lauseista (5.1.12 ja 5.1.13). Olkoon $\phi \in \mathscr{S}$, jolloin

$$\langle \check{u}, \phi \rangle = \langle u, \check{\phi} \rangle = \langle u, (2\pi)^{-n} \hat{\hat{\phi}} \rangle = \langle (2\pi)^{-n} \hat{\hat{u}}, \phi \rangle, \tag{131}$$
$$\langle u, \phi \rangle = \langle u, (2\pi)^{-2n} \mathscr{F}^4(\phi) \rangle = \langle (2\pi)^{-2n} \mathscr{F}^4(u), \phi \rangle \text{ ja} \tag{132}$$
$$\langle u, \phi \rangle = \langle u, \mathscr{F}\mathscr{F}^{-1}(\phi) \rangle = \langle \hat{u}, \mathscr{F}^{-1}(\phi) \rangle. \tag{133}$$

□

5.4 Esimerkkejä

Seuraavaksi laskemme eri distribuutioiden Fourier-muunnoksia.

Esimerkki 5.4.1 (Deltafunktio). Koska distribuution δ_0 kantaja on kompakti, niin $\delta_0 \in \mathscr{S}'$. Sen Fourier-muunnos on siis määritelty. Olkoon $\phi \in \mathscr{S}$. Nyt

$$\langle \widehat{\delta_0}, \phi \rangle = \langle \delta_0, \hat{\phi} \rangle = \hat{\phi}(0) = \int \phi(x) dx = \langle 1, \phi \rangle, \tag{134}$$

joten $\widehat{\delta_0} = 1$.

Esimerkki 5.4.2 (Vakiodistribuutio). Olkoon $a \in \mathbb{C}$. Distribuutio $a \in \mathscr{S}'$, sillä se on polynomialisesti rajoitettu. Koska Fourier-muunnos on lineaarinen, riittää laskea vakiodistribuution $1 \in \mathscr{S}'$ muunnos. Lauseen 5.3.6 perusteella

$$\hat{a} = a\hat{1} = a\hat{\widehat{\delta_0}} = (2\pi)^n a\check{\delta_0} = (2\pi)^n a\delta_0. \tag{135}$$

Esimerkki 5.4.3 (Heavisiden funktio). Olkoon $H : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{, kun } x < 0 \\ 1 & \text{, kun } x \geq 0 \end{cases}. \tag{136}$$

Tämäkin on polynomialisesti rajoitettu, joten $H \in \mathscr{S}'$.

Koska $DH = -i\delta_0$, ottamalla Fourier-muunnos tämän molemmilta puolilta saamme $\xi\widehat{H} = -i\widehat{\delta_0} = -i$. Funktio $\xi \mapsto \xi^{-1}$ on lokaalisti integroituva joukossa $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, joten

$$\widehat{H}_{|\mathbb{R}\setminus\{0\}}(\xi) = \frac{-i}{\xi}. \tag{137}$$

Tämän eräs regularisaatio on $-i\,p.v.1/\xi$. Voimme kirjoittaa $\widehat{H} = -i\,p.v.1/\xi + \tilde{H}$, jolloin ratkaistavaksi jää $\xi\tilde{H} = 0$. Luvussa 6.1 näemme, mitkä ovat senmuotoisen yhtälön ratkaisut. Se ei määrää distribuutiota täysin, vaan kertoo, että $\widehat{H}$ on muotoa

$$\widehat{H}(\xi) = -i\,p.v.\frac{1}{\xi} + c\delta_0. \tag{138}$$

Vakion c määräämiseksi integroimme yhtälön molemmat puolet gaussista testifunktiota $\varrho(x) = \exp(-\frac{1}{2}x^2)$ vastaan. Lemman 5.1.11 mukaan $\hat{\varrho}(\xi) = \sqrt{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}\xi^2)$. Nyt

$$\langle \widehat{H}, \varrho \rangle = \langle H, \hat{\varrho} \rangle = \sqrt{2\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi = \pi, \tag{139}$$

ja toisaalta

$$\langle \widehat{H}, \varrho \rangle = \langle -ip.v.\frac{1}{\xi} + c\delta_0, \varrho \rangle = -i \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|\xi|>\epsilon} \frac{e^{-\frac{1}{2}\xi^2}}{\xi} d\xi + c = c, \tag{140}$$

sillä kaavassa oleva integroitava funktio on pariton ja integroimisalue origon suhteen symmetrinen. Siispä $c = \pi$ ja

$$\widehat{H}(\xi) = -i\, p.v. \frac{1}{\xi} + \pi\delta_0. \tag{141}$$

6 Yhtälöiden ratkaisemista

Edellisen luvun lauseiden perusteella tiedämme, että mikäli vakiokertoimiseen osittaisdifferentiaaliyhtälöön $\sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha D^\alpha u = v$ tehdään Fourier-muunnos, niin saamme muotoa $P(\xi)\hat{u} = \hat{v}$ olevan algebrallisen yhtälön. Tässä P on polynomi $P(\xi) = \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha \xi^\alpha$ ja sitä nimitetään alkuperäisen differentiaalioperaattorin *symboliksi*. Siispä jos haluamme löytää vakiokertoimiselle lineaariselle homogeeniselle osittaisdifferentiaaliyhtälölle temperoidun distribuutioratkaisun, niin on osattava ratkaista algebrallinen yhtälö $P(\xi)\hat{u} = \hat{v}$.

Tässä luvussa ratkaisemme aluksi yksiulotteisessa avaruudessa muotoa $P(x)u = 0$ olevat yhtälöt. Sitten siirrymme korkeampiin ulottuvuuksiin ja laajennamme eräät homogeeniset distribuutiot joukosta $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ koko avaruuteen. Tämä vastaa yhtälön $f(x)u = v$ ratkaisemista, kun f on homogeeninen ja sileä ja v on homogeeninen distribuutio. Lopuksi sovellamme tuloksia eräiden differentiaaliyhtälöiden ratkaisujen olemassaolon ja yksikäsitteisyyden todistamiseksi.

6.1 Yhtälön $P(x)u = 0$ ratkaisu suoralla

Haluamme ratkaista yhtälön $P(x)u = 0$ reaaliakselilla. Mikäli P ei saavuta nollaa reaalisilla muuttujan arvoilla, on $1/P$ sileä. Voimme siis päätellä, että $0 = 1/P \cdot 0 = 1/P \cdot (P \cdot u) = u$. Tilanne on epätriviaali, jos $P(x_0) = 0$ jollakin $x_0 \in \mathbb{R}$. Ratkaisemme yhtälön parin lemman jälkeen.

Lemma 6.1.1. *Olkoon $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ja $\phi(a) = \ldots = \phi^{(k)}(a) = 0$. Tällöin kuvaus $x \mapsto \phi(x)/(x-a)^{k+1}$ on jatkuva.*

Todistus. Funktio on selvästi jatkuva, kun $x \neq a$. Koska ϕ on ainakin $k+1$ kertaa jatkuvasti derivoituva, niin voimme käyttää Taylor-kehitelmää. Lisäksi funktiosta ϕ tehdyt oletukset yksinkertaistavat sitä. Käyttämällä Lagrangen jäännöstermiä saamme

$$\begin{aligned} \frac{\phi(x)}{(x-a)^{k+1}} &= \frac{\phi(a) + \ldots + \frac{\phi^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_k(x)}{(x-a)^{k+1}} \\ &= \frac{R_k(x)}{(x-a)^{k+1}} = C_k \phi^{(k+1)}(x'), \end{aligned} \tag{142}$$

jollakin $C_k \in \mathbb{C}$ ja x' joka on x ja a välissä. Kun $x \longrightarrow a$, niin $x' \longrightarrow a$. Funktion $\phi^{(k+1)}$ jatkuvuuden nojalla $\phi(x)/(x-a)^{k+1} \longrightarrow C_k \phi^{(k+1)}(a)$. $\square$

Lemma 6.1.2. *Olkoon $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ja $\phi(a) = \ldots = \phi^{(k)}(a) = 0$. Tällöin kuvaus $x \mapsto \phi(x)/(x-a)^{k+1}$ on sileä.*

Todistus. Todistetaan väite induktiolla funktion $\phi(x)/(x-a)^{k+1}$ sileyden suhteen. Sopiva induktioväite on "$\phi(x)/(x-a)^{k+1} \in C^n$ ja $\partial^n \phi(x)/(x-a)^{k+1} = \phi_n(x)/(x-a)^{n+k+1}$, missä ϕ_n on sileä ja $\phi_n(a) = \ldots = \phi_n^{(k+n)}(a) = 0$".

$n = 0$: Kuvaus on jatkuva lemman 6.1.1 perusteella. Oletuksista seuraa induktioväitteen jälkimmäinen osa.

$n+1$: Oletetaan induktioväite todeksi indeksillä n. Olkoon $x \neq a$, jolloin

$$\begin{aligned}\partial^{n+1} \frac{\phi(x)}{(x-a)^{k+1}} &= \partial \frac{\phi_n(x)}{(x-a)^{n+k+1}} \\ &= \frac{\phi_n'(x)(x-a)^{n+k+1} - (n+k+1)\phi_n(x)(x-a)^{n+k}}{(x-a)^{2(n+k+1)}} \\ &= \frac{\phi_n'(x)(x-a) - (n+k+1)\phi_n(x)}{(x-a)^{(n+1)+k+1}} =: \frac{\phi_{n+1}(x)}{(x-a)^{(n+1)+k+1}}.\end{aligned} \tag{143}$$

Tarkistetaan induktioväitteen jälkimmäinen osa. Selvästi ϕ_{n+1} on sileä. Jos $m \in \mathbb{N}$, niin $\partial^m \phi_{n+1}(x) = \phi_n^{(m+1)}(x)(x-a) + (m-n-k-1)\phi_n^{(m)}(x)$. Induktio-oletuksen nojalla tämä lauseke on nolla pisteessä a, mikäli $m \leq n+1+k$. Nyt lemman 6.1.1 perusteella $\phi_{n+1}(\cdot)/(\cdot - a)^{(n+1)+k+1}$ on jatkuva. Siispä kaavan (143) nojalla $\phi(\cdot)/(\cdot - a)^{k+1} \in C^{n+1}$. □

Seuraus 6.1.3. *Olkoon $k \in \mathbb{N}$ ja $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Jos $\partial^\alpha \phi(0) = 0$ kaikilla multi-indekseillä $\alpha \in \{0, \ldots, 2k-1\}^n$, niin kuvaus $\psi(x) = \phi(x)/(x_1^{2k} + \cdots + x_n^{2k})$ on sileä.*

Todistus. ψ on sileä origon ulkopuolella, koska sen nimittäjä ei häviä siellä. Lemman 6.1.2 nojalla sen kaikki osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia origossa. Siispä se on sileä myös origossa. □

Lause 6.1.4. *Olkoon $P : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ polynomi ja $P(x) = P_0(x) \prod_{j=1}^k (x - x_j)^{k_j}$, $P_0(x) \neq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, sen tekijähajotelma reaaliakselilla. Olkoon $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Tällöin*

$$P(x)u = 0 \Longrightarrow u = \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{k_j - 1} a_{jl} \delta_{x_j}^{(l)} \ \textit{joillakin}\ a_{jl} \in \mathbb{C}. \tag{144}$$

Todistus. Olkoon $\phi \in C_0^\infty$. Tarkastellaan kahta tapausta.

1) $\phi^{(l)}(x_j) = 0$ kaikilla $j = 1, \ldots, k$ ja $l = 0, \ldots, k_j - 1$. Tällöin lemman 6.1.2 nojalla funktio $\phi(\cdot)/\prod_{j=1}^k (\cdot - x_j)^{k_j}$ on sileä. Sen kantaja on myös kompakti. Myös $1/P_0$ on sileä. Näinollen voimme päätellä, että

$$\langle u, \phi \rangle = \left\langle P(x)u, \frac{\phi(x)}{P_0(x) \prod_{j=1}^k (x - x_j)^{k_j}} \right\rangle = 0, \tag{145}$$

sillä $P(x)u = 0$.

2) Olkoon $g_{jl} \in C_0^\infty$, $g_{jl}(x) = \frac{(x-x_j)^l}{l!}\chi(x-x_j)$, missä $\chi \in C_0^\infty$ on vakio 1 origon jossakin ympäristössä ja sen kantaja sisältyy väliin, jonka pituus on pienempi kuin mikään etäisyys $|x_m - x_n|$. Tällainen cutoff-funktio on olemassa lauseen 3.1.5 nojalla. Tällöin $x_m \notin \operatorname{supp}(g_{jl})$, mikäli $m \neq j$. Lisäksi $g_{jl}^{(m)}(x_j) = 0$, jos $m \neq l$ ja se on $= 1$, jos $m = l$. Näillä funktioilla on se ominaisuus, että testifunktiosta ϕ vähentämällä $g_{jl}\phi^{(l)}(x_j)$ sen derivaatta numero l häviää pisteessä x_j mutta pysyy samana muissa pisteissä x_m. Muut derivaatat eivät muutu pisteissä x_j, x_m.

Voimme nyt jatkaa tapausta 2). Funktioiden g_{jl} ominaisuuksista seuraa, että $\phi - \sum_{j=1}^k \sum_{l=0}^{k_j} g_{jl}\phi^{(l)}(x_j) \in C_0^\infty$ ja se toteuttaa tapauksen 1) ehdon. Siispä

$$\begin{aligned}
\langle u, \phi\rangle &= \Big\langle u, \phi - \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=0}^{k_j-1} g_{jl}\phi^{(l)}(x_j) + \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=0}^{k_j-1} g_{jl}\phi^{(l)}(x_j)\Big\rangle \\
&= \Big\langle u, \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=0}^{k_j-1} g_{jl}\phi^{(l)}(x_j)\Big\rangle = \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=0}^{k_j-1} \langle u, g_{jl}\rangle \phi^{(l)}(x_j) \qquad (146)\\
&= \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=0}^{k_j-1} a_{jl}\phi^{(l)}(x_j),
\end{aligned}$$

missä $a_{jl} \in \mathbb{C}$ ovat vakioita. □

Ylläolevan lauseen muotoilua tai todistusta on vaikea laajentaa useampiulotteiseen avaruuteen. Lauseessa esiintyvä deltafunktio voidaan kuitenkin yleistää käyttäen monistojen teoriaa. Tämä tehdään esimerkiksi lähteessä [Gel'fand & Shilov 1964, III. 1]. Jos polynomilla on vain eristettyjä nollakohtia, niin asia on huomattavasti helpompi.

Lause 6.1.5. *Olkoot $k \in \mathbb{N}$, $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ ja $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ polynomi $P(x) = x_1^{2k} + \cdots + x_n^{2k}$. Tällöin*

$$P(x)u = 0 \Longrightarrow u = \sum_{|\alpha| \le 2k-1} c_\alpha \partial^\alpha \delta_0, \qquad (147)$$

joillakin $c_\alpha \in \mathbb{C}$.

Todistus. Tässä käytetään samaa ajatusta kuin yksiulotteisessa tapauksessa. Olkoot $\phi, \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ testifunktioita ja $\chi(x) = 1$ origon ympäristössä. Lause

3.1.5 antaa cutoff funktion χ olemassaolon. Nyt

$$\begin{aligned}\langle u,\phi\rangle &= \Big\langle u, \phi(x) - \sum_{|\alpha|\le 2k-1} \frac{x^\alpha}{\alpha!}\chi(x)\partial^\alpha\phi(0)\Big\rangle + \sum_{|\alpha|\le 2k-1} \big\langle u, \frac{x^\alpha}{\alpha!}\chi(x)\big\rangle\partial^\alpha\phi(0) \\ &= \Big\langle P(x)u, \frac{\phi(x) - \sum \frac{x^\alpha}{\alpha!}\chi(x)\partial^\alpha\phi(0)}{x_1^{2k}+\cdots+x_n^{2k}}\Big\rangle + \sum_{|\alpha|\le 2k-1} \big\langle u, \frac{x^\alpha}{\alpha!}\chi(x)\big\rangle\partial^\alpha\phi(0) \\ &= \sum_{|\alpha|\le 2k-1} \big\langle u, \frac{x^\alpha}{\alpha!}\chi(x)\big\rangle\partial^\alpha\phi(0),\end{aligned} \tag{148}$$

sillä seurauksen 6.1.3 nojalla $\big(\phi(x) - \sum_{|\alpha|\le 2k-1}\frac{x^\alpha}{\alpha!}\chi(x)\partial^\alpha\phi(0)\big)/P(x)$ on testifunktio. Siispä $u = \sum_{|\alpha|\le 2k-1} c_\alpha\partial^\alpha\delta_0$, missä $c_\alpha = \langle u, x^\alpha/\alpha!\chi\rangle$ ovat vakioita. □

6.2 Homogeenisten distribuutioiden regularisointi

Edellisessä luvussa ratkaistiin yhtälö $P(x)u = 0$ algebrallisesti yksiulotteisessa tapauksessa. Se ei yleisty yhtälöiden $P(x)u = v$ ratkaisemiseen. Toinen lähestymistapa on määritellä $\langle u,\phi\rangle = \langle P(x)u, \phi/P(x)\rangle = \langle v, \phi/P(x)\rangle$, kun testifunktion ϕ kantaja ei osu joukkoon, jossa $P(x) = 0$. Tämän jälkeen pyrittäisiin laajentamaan u koko avaruuteen säilyttäen joitakin sen ominaisuuksia.

Keskitymme laajentamaan homogeenisia distribuutioita joukosta $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ koko avaruuteen. Se vastaa yhtälön $f(x)u = v$ ratkaisemista, missä v on homogeeninen distribuutio ja f on homogeeninen sileä funktio, jonka ainoa nollakohta on origossa.

Määritelmä 6.2.1. Olkoon $A \subset X$ avoin ja $u \in \mathscr{D}'(A)$, $U \in \mathscr{D}'(X)$. Jos $U_{|A} = u$, niin sanomme, että U *laajentaa distribuution* u *joukkoon* X.

Huomautus. On myös käytössä sanonta U *regularisoi* distribuution u.

Seuraavaksi määrittelemme, mitä tarkoitetaan homogeenisella distribuutiolla. Funktiota f sanotaan homogeeniseksi, jos $f(tx) = t^a f(x)$ kaikilla $t > 0$. Lukua a sanotaan asteeksi. Tulkitaan f distribuutioksi ja tehdään integraalissa muuttujanvaihto

$$\int f(x)\phi(x)dx = \int t^{-a} f(tx)\phi(x)dx = \int f(y)t^{-a-n}\phi(y/t)dy. \tag{149}$$

Voimme korvata luvun t käänteisluvullaan, jolloin saamme $\langle f,\phi\rangle = t^a\langle f,\phi_t\rangle$, missä $\phi_t(x) = t^n\phi(tx)$. Seuraava määritelmä laajentaa siis funktioiden homogeenisuutta.

Määritelmä 6.2.2. Olkoon $a \in \mathbb{C}$. Distribuution $u \in \mathscr{D}'(X)$ sanotaan olevan *homogeeninen astetta* a, mikäli $\langle u, \phi \rangle = t^a \langle u, \phi_t \rangle$ kaikilla $\phi \in C_0^\infty(X)$ ja $t > 0$. Tässä merkitään $\phi_t(x) = t^n \phi(tx)$, missä n on avaruuden ulottuvuus.

Huomautus 6.2.3. Edellisessä määritelmässä ja koko tässä kappaleessa tehdään kompleksisten eksponenttien suhteen seuraava valinta: Kun $x > 0$ ja $a = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, niin asetamme $x^a = x^\alpha e^{\beta i \log(x)}$, missä logaritmin arvoksi on valittu se reaalinen.

Tavoitteenamme on regularisoida astetta a olevat joukossa $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ määritellyt homogeeniset distribuutiot. Haluamme, että laajennettu distribuutio on myös homogeeninen ja astetta a. Käsittelemme aluksi erityisen funktion x_+^a ja hyödynnämme sen ominaisuuksia yleisessä tapauksessa. Seuraavat lauseet ovat peräisin lähteestä [Hörmander I].

Määritelmä 6.2.4. Olkoon $a \in \mathbb{C}$. Funktio $x_+^a : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ määritellään kaavalla

$$x_+^a(x) = \begin{cases} x^a, & \text{kun } x > 0 \\ 0, & \text{kun } x \leq 0 \end{cases}. \tag{150}$$

Funktio x_+^a on homogeeninen astetta a. Se on lokaalisti integroituva, jos $\Re a > -1$. Muulloin se on lokaalisti integroituva joukossa $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tavoitteenamme on regularisoida se mahdollisimman monella eri $a \in \mathbb{C}$. Olkoon $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Jos $\Re a > -1$, niin osittaisintegroimalla saamme

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^a \phi(x) dx &= \int_0^\infty \phi(x) x^a dx = \Big/_0^\infty \frac{\phi(x) x^{a+1}}{a+1} - a \int_0^\infty \phi'(x) x^{a+1} dx \\ &= (-1) a \int_0^\infty x^{a+1} \phi'(x) dx = \dots \\ &= (-1)^k a(a+1) \cdots (a+k-1) \int_0^\infty x^{a+k} \phi^{(k)}(x) dx. \end{aligned} \tag{151}$$

Tämän kaavan avulla voimme kasvattaa kompleksiluvun a reaaliosaa positiivisilla kokonaisluvuilla. Voimme siis määritellä distribuution x_+^a, joka regularisoi funktion x_+^a, kunhan osittaisintegroinnin reunatermi on määritelty.

Määritelmä 6.2.5. Olkoon $a \in \mathbb{C}$ ja $a \neq -1, -2, -3$, jne. Tällöin distribuutio x_+^a määritellään kaavalla

$$\langle x_+^a, \phi \rangle = \begin{cases} \int_0^\infty x^a \phi(x) dx, & \text{jos } \Re a > -1 \\ (-1)^k a \cdots (a+k-1) \int_0^\infty x_+^{a+k} \phi^{(k)}(x) dx, & \text{muuten} \end{cases}, \tag{152}$$

missä $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ja $k \in \mathbb{N}$ on se yksikäsitteinen luku, jolla $-1 < \Re a + k < 0$.

Lause 6.2.6. *Olkoon $a \in \mathbb{C}$ ja $a \neq -1, -2, -3$, jne. Tällöin x_+^a on distribuutio. Lisäksi jos $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, niin*

$$\langle x_+^a, \phi \rangle = \int_0^\infty x^a \phi(x) dx. \tag{153}$$

Todistus. Jos $\Re\beta > -1$, niin funktio x_+^β on lokaalisti integroituva. Jos $(\phi_l) \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$ on jono testifunktioita ja $\phi_l \longrightarrow 0$, niin $\phi_l^{(k)} \longrightarrow 0$ kaikilla luonnollisilla luvuilla k. Siispä määritelmän (152) luvun k valinnan perusteella molemmat vaihtoehdot määrittelevät distribuution.

Olkoon $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0\})$. Tällöin $x_+^{a+l}\phi(x)$ on sileä kaikilla $l \in \mathbb{N}$, joten yhtälöketjun (151) välivaiheet ovat korrekteja. Siispä $\langle x_+^a, \phi \rangle = (-1)^k a \cdots (a + k - 1) \int_0^\infty x_+^{a+k} \phi^{(k)}(x) dx = \int_0^\infty x^a \phi(x) dx$. □

Nyt voimme alkaa regularisoimaan muitakin homogeenisiä distribuutioita. Olkoon $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Haluaisimme määritellä, mitä on $\langle u, \phi \rangle$, kun $0 \in \operatorname{supp}(\phi)$. Eräs tapa tehdä se on määritellä jatkuva lineaarinen kuvaus $F : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, jolla on ominaisuus $\langle u, \phi \rangle = \langle u, F(\phi) \rangle$ kaikilla $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Juuri niin teemme. Kuvauksen F rakennamme hyödyntäen seuraavaa lemmaa.

Lemma 6.2.7. *Olkoon $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ homogeeninen ja astetta a. Tällöin $\langle u, \phi \rangle = 0$ kaikilla $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, joilla $\int_0^\infty r^{a+n-1} \phi(rx) dr = 0$ identtisesti.*

Todistus. Kaikilla $t > 0$ ja $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ on $\langle u, \psi \rangle = t^a \langle u, t^n \psi(t\cdot) \rangle$. Yhtälöketjussa (59) todistettiin, että jos testifunktioperhe riippuu derivoituvasti jostakin kompaktissa joukossa olevasta parametrista t, niin $\partial_t \langle u, \psi_t \rangle = \langle u, \partial_t \psi_t \rangle$. Derivoimalla tämän todistuksen alun yhtälö saamme

$$\begin{aligned} 0 &= a t^{a-1} \big\langle u, t^n \psi(tx) \big\rangle + t^a \big\langle u, n t^{n-1} \psi(tx) + t^n x \cdot \nabla_x \psi(tx) \big\rangle \quad \mid t \mapsto 1 \\ &= \big\langle u, (a+n)\psi(x) + x \cdot \nabla \psi(x) \big\rangle. \end{aligned} \tag{154}$$

Todistamme, että mikäli $\int_0^\infty r^{a+n-1} \phi(rx) dr = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, niin löytyy $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, jolla $\phi(x) = (a+n)\psi(x) + x \cdot \nabla \psi(x)$. Tällöin kaavan (154) nojalla $\langle u, \phi \rangle = 0$. Haluamme siis tutkia yhtälöä

$$(a+n)\psi(x) + x \cdot \nabla \psi(x) = \phi(x). \tag{155}$$

Teemme muuttujanvaihdon $x = r\omega$, missä $r = |x|$ ja $\omega = x/|x|$. Tällöin $\partial_r \psi(r\omega) = \sum \partial_{x_j} \psi(x) \partial_r x_j = \sum \partial_{x_j} \psi(x) \omega_j = \omega \cdot \nabla_x \psi(x) = x/|x| \cdot \nabla \psi(x)$. Siispä $r \partial_r \phi(r\omega) = x \cdot \nabla \psi(x)$. Tämän havainnon ja luvulla r^{a+n-1} kertomisen jälkeen (155) muuttuu yhtälöksi

$$\partial_r \big(r^{a+n} \psi(r\omega) \big) = r^{a+n-1} \phi(r\omega). \tag{156}$$

Koska $0 \notin \mathrm{supp}(\phi)$, niin yhtälön (156) ratkaisu on

$$\psi(r\omega) = \frac{1}{r^{a+n}} \int_0^r R^{a+n-1} \phi(R\omega) dR. \tag{157}$$

Tämä on sileä. Pienillä luvun r arvoilla se häviää, sillä 0 ei kuulu testifunktion ϕ kantajaan. Suurilla muuttujan r arvoilla se häviää, mikäli pätee $\int_0^\infty r^{a+n-1}\phi(rx)dr = 0$ kaikilla x. Näin on, joten $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Yhtälön (154) nojalla $\langle u, \phi \rangle = 0$. □

Nyt voimme todistaa tämän luvun päätuloksen.

Lause 6.2.8. *Olkoon $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ homogeeninen ja astetta a, missä $a \neq -n, -n-1, -n-2$, jne. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen astetta a oleva homogeeninen laajennus $\tilde{u} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, jolla $\tilde{u}_{|\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} = u$.*

Todistus. Todistamme aluksi olemassaolon. Määritellään seuraavaksi sopiva kuvaus $F : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Edellinen lemma motivoi kaavan

$$F\phi(x) = \psi(|x|)\big\langle r_+^{a+n-1}, \phi(rx)\big\rangle. \tag{158}$$

Tässä $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ on yksiulotteinen testifunktio, jolla on ominaisuus[5] $\int_0^\infty \psi(r|x|)r^{-1}dr = 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Kaavaan (158) laitettiin ψ, jotta kantaja saataisiin kompaktiksi ja pois origosta. Samalla päättelyllä kuin yhtälöketjussa (59) näemme, että $\partial^\alpha \langle r_+^{a+n-1}, \phi(rx)\rangle = \langle r_+^{a+n-1}, r^{|\alpha|}\partial^\alpha \phi(rx)\rangle$ multi-indekseillä α. Siispä $F\phi$ on sileä. Lisäksi F on jonojatkuva, koska jos $\phi_j \longrightarrow \phi$, niin $\phi_j(\cdot x) \longrightarrow \phi(\cdot x)$ kaikilla x ja kertojan $\psi(|x|)$ takia supremum voidaan ottaa kompaktin joukon yli. Lineaarisuus on selvä. Funktion ψ erikoisominaisuuden valinta selviää, kun haluamme käyttää edellistä lemmaa.

Määrittelemme nyt distribuution u regularisaation $\tilde{u}$. Jos $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, niin merkitsemme

$$\langle \tilde{u}, \phi \rangle = \langle u, F\phi \rangle. \tag{159}$$

Koska u on punkteeratussa avaruudessa määritelty distribuutio ja kuvaus $F : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ on jatkuva ja lineaarinen, niin $\tilde{u}$ on koko avaruudessa määritelty distribuutio. Se myös regularisoi distribuution u. Ni-

[5] Esimerkiksi valitaan mielivaltainen positiivisella reaaliakselilla nollasta poikkeava $\varrho \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ ja määritellään $\psi(r) = r\varrho(r)/\int_0^\infty \varrho(t)dt$. Nyt $\int_0^\infty \psi(r|x|)r^{-1}dr = \int_0^\infty \psi(R)(r|x|)^{-1}dR = \int_0^\infty \psi(R)R^{-1}dR = 1$

mittäin olkoot $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ja $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, jolloin lauseen 6.2.6 nojalla

$$\begin{aligned}\int_0^\infty r^{a+n-1} F\phi(rx) dr &= \int_0^\infty r^{a+n-1} \psi(r|x|) \big\langle R_+^{a+n-1}, \phi(Rrx) \big\rangle dr \\ &= \int_0^\infty r^{a+n-1} \psi(r|x|) \int_0^\infty R^{a+n-1} \phi(Rrx) dR dr \\ &= \int_0^\infty r^{a+n-1} \psi(r|x|) \int_0^\infty \frac{\mathscr{R}^{a+n-1}}{r^{a+n}} \phi(\mathscr{R}x) d\mathscr{R} dr \\ &= \int_0^\infty \mathscr{R}^{a+n-1} \phi(\mathscr{R}x) d\mathscr{R},\end{aligned} \tag{160}$$

koska $\int_0^\infty \psi(r|x|) r^{-1} dr = 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Koska $\phi(0) = 0$, niin yhtälö on myös voimassa, kun $x = 0$. Vaihtamalla integroimismuuttujaa saamme $\int_0^\infty r^{a+n-1} \big(F\phi(rx) - \phi(rx)\big) dr = 0$ kaikilla x. Erotus $F\phi - \phi$ on testifunktio eikä origo kuulu sen kantajaan, joten voimme käyttää lemmaa 6.2.7 ja saamme

$$\langle \tilde{u} - u, \phi \rangle = \langle u, F\phi - \phi \rangle = 0. \tag{161}$$

Siispä $\tilde{u}$ laajentaa distribuution u.

Yksikäsitteisyys seuraavaksi. Olkoot $\tilde{u}$ ja $\bar{u}$ kaksi homogeenista astetta a olevaa distribuutiota, jotka laajentavat distribuution u koko avaruuteen. Nyt jos ϕ on testifunktio ja $0 \notin \operatorname{supp}(\phi)$, niin $\langle \tilde{u} - \bar{u}, \phi \rangle = \langle u, \phi \rangle - \langle u, \phi \rangle = 0$. Siispä $\operatorname{supp}(\tilde{u} - \bar{u}) \subset \{0\}$.

Olkoot $0 < t < 1$ ja $\phi, \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ sellaiset, että $\chi(x) = 1$, jos $|x| < 1$ ja ϕ on mielivaltainen. Koska $\chi = 1$ origon ympärillä, niin testifunktio $\phi_t - \chi\phi_t$ on nolla origon ympäristössä. Nyt $\langle \tilde{u} - \bar{u}, \phi_t \rangle = \langle \tilde{u} - \bar{u}, \chi\phi_t \rangle$, koska erotuksen kantaja on origossa. Mikäli $\Re a + n > 0$, saamme arvion

$$\langle \tilde{u} - \bar{u}, \phi \rangle = t^a \big\langle \tilde{u} - \bar{u}, \phi_t \big\rangle = t^{a+n} \big\langle \tilde{u} - \bar{u}, t^{-n} \chi\phi_t \big\rangle \longrightarrow 0, \tag{162}$$

kun $t \longrightarrow 0$, sillä $t^{-n}\chi\phi_t \longrightarrow \chi\phi(0)$ testifunktioiden avaruudessa, minkä takia $\langle \tilde{u} - \bar{u}, t^{-n}\chi\phi_t \rangle$ pysyy äärellisenä. Tässä tapauksessa siis $\tilde{u} = \bar{u}$.

Olkoot $\Re a + n \leq 0$ ja α multi-indeksi, jolla $\Re a + |\alpha| + n > 0$. Jos $t > 0$ ja ϕ on testifunktio, niin

$$\begin{aligned}\big\langle x^\alpha(\tilde{u} - \bar{u}), \phi \big\rangle = \big\langle \tilde{u} - \bar{u}, x^\alpha \phi(x) \big\rangle &= t^{a+|\alpha|} \big\langle \tilde{u} - \bar{u}, t^n x^\alpha \phi(tx) \big\rangle \\ &= t^{a+|\alpha|} \big\langle x^\alpha(\tilde{u} - \bar{u}), \phi_t \big\rangle.\end{aligned} \tag{163}$$

Siispä $x^\alpha(\tilde{u} - \bar{u})$ on homogeeninen ja astetta $\Re a + |\alpha|$. Sen kantaja ei kasva, joten on oltava $x^\alpha(\tilde{u} - \bar{u}) = 0$ edellisen kappaleen nojalla. Tästä seuraa, että $P(x)(\tilde{u} - \bar{u}) = 0$, missä $P(x) = x_1^{2|\alpha|} + \cdots + x_n^{2|\alpha|}$. Lauseen 6.1.5 nojalla $\tilde{u} - \bar{u}$ on lineaarikombinaatio deltafunktion derivaatoista. Koska $\langle \partial^\beta \delta_0, \phi_t \rangle =$

$t^{n+|\beta|}\partial^\beta\phi(0) = t^{n+|\beta|}\langle\partial^\beta\delta_0, \phi\rangle$, niin deltafunktion derivaatat ovat homogeenisia, mutta kokonaislukuastetta enintään $-n$. Koska $\tilde{u} - \bar{u}$ on homogeeninen, niin senkin asteen on oltava kokonaisluku ja enintään $-n$, ellei lineaarikombinaation termien kertoimet ole nollia. Oletuksen nojalla sen aste ei ole $-n, -n-1, \ldots$, joten $\tilde{u} = \bar{u}$.

□

Huomautus 6.2.9. Ehto $a \neq -n, -n-1$, jne. ei ole välttämätön. Esimerkiksi yksiulotteisessa tapauksessa $p.v.1/x$ regularisoi funktion $1/x$ ja molemmat ovat homogeenisia astetta -1. Lähteessä [Hörmander I, Lause 3.2.4] on käyty läpi eri tapaukset, kun $a \leq -n$ on kokonaisluku.

Huomautus 6.2.10. Itse asiassa todistuksessa esiintyvä F voidaan laajentaa jonojatkuvaksi kuvaukseksi $F : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Tämä seuraa siitä, että kaavassa $\langle r^{a+n-1}, \phi(rx)\rangle$ esiintyvät integraalit $\int_0^\infty r^\alpha \partial^\beta \phi(rx) dr$ suppenevat kaikilla $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ silloin, kun ne suppenevat kaikilla testifunktioilla $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

6.3 Soveltaminen differentiaaliyhtälöihin

Käytämme seuraavaksi edellisten lukujen tuloksia löytääksemme ratkaisuja lineaarisille vakiokertoimisille differentiaaliyhtälöille. Pääajatuksena on käyttää Fourier-muunnosta annettuun yhtälöön jonka jälkeen ratkaistaan saatu algebrallinen yhtälö.

Etsitään yhden ulottuvuuden vakiokertoimisen lineaarisen differentiaaliyhtälön

$$\sum_{a=0}^{d} c_a D^a u = 0 \tag{164}$$

temperoidut distribuutioratkaisut. Ottamalla Fourier-muunnos yhtälön molemmilta puolilta saamme kaavan (126) nojalla

$$P(\xi)\hat{u} := \sum_{a=0}^{d} c_a \xi^a \hat{u} = 0. \tag{165}$$

Koska P on polynomi, niin lauseen 6.1.4 perusteelle $\hat{u}$ on muotoa

$$\hat{u}(\xi) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{k_j - 1} C_{jl} \delta_{\xi_j}^{(l)}, \tag{166}$$

missä k on polynomin P eri reaalisten juurten ξ_j lukumäärä ja k_j niiden kertaluvut. Koska $\partial = iD$, niin kaavan (126) ja lauseen 5.3.6 nojalla saamme

$$\check{u}(x) = (2\pi)^{-n} \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{k_j-1} C_{jl}(ix)^l \mathscr{F}\big(\delta_{\xi_j}\big) = (2\pi)^{-n} \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{k_j-1} C_{jl}(ix)^l e^{-ix\xi_j}, \tag{167}$$

sillä $\langle \widehat{\delta_{\xi_j}}, \phi\rangle = \langle \delta_{\xi_j}, \hat{\phi}\rangle = \int e^{-ix\xi_l}\phi(x)dx = \langle e^{-ix\xi_l}, \phi\rangle$. Ottamalla uudet merkinnät vakioille saamme lauseen

Lause 6.3.1. *Olkoon $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ ja $P(D)u = \sum_{a=0}^{d} c_a D^a u = 0$. Olkoon k polynomin P eri reaalisten juurten ξ_j lukumäärä ja k_j niiden kertaluvut. Tällöin on olemassa vakiot $A_{jl} \in \mathbb{C}$, joilla*

$$u(x) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{k_j-1} A_{jl} x^l e^{ix\xi_j}. \tag{168}$$

Tarkastellaan taas useampiulotteista avaruutta. Ratkaisemme seuraavaksi muotoa $P(D)u = v$ olevat yhtälöt, missä P on homogeeninen elliptinen polynomi[6] ja v on homogeeninen. Näiden asteilta kuitenkin vaaditaan pari ehtoa. Todistamme aluksi, että jos $v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ on homogeeninen, niin $\hat{v}$ on myös.

Lause 6.3.2. *Olkoon $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ homogeeninen astetta $a \in \mathbb{C}$. Tällöin $\hat{u}$ on homogeeninen astetta $-a-n$.*

Todistus. Olkoon $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ja $t > 0$. Tällöin

$$\hat{\phi}(t\xi) = \int e^{-ix\cdot t\xi}\phi(x)dx = t^{-n}\int e^{-iy\cdot\xi}\phi(y/t)dy = \widehat{\phi_{t^{-1}}}(\xi). \tag{169}$$

Nyt voimme laskea

$$\langle \hat{u}, \phi\rangle = \langle u, \hat{\phi}\rangle = t^a\langle u, t^n\hat{\phi}(t\xi)\rangle = t^{a+n}\langle u, \widehat{\phi_{t^{-1}}}\rangle = t^{a+n}\langle \hat{u}, \phi_{t^{-1}}\rangle, \tag{170}$$

joten $\langle \hat{u}, \phi\rangle = t^{-a-n}\langle \hat{u}, \phi_t\rangle$. □

Lause 6.3.3. *Olkoot $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ homogeeninen elliptinen polynomi astetta $a \in \mathbb{N}$ ja $v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ homogeeninen astetta $b \in \mathbb{C}$. Jos $a + b \notin \mathbb{N}$, niin yhtälöllä*

$$P(D)u = v \tag{171}$$

on yksikäsitteinen homogeeninen ratkaisu joukossa $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

[6] P on homogeeninen ja elliptinen jos $P(tx) = t^a P(x)$ jollakin $a \in \mathbb{C}$ ja $P(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Todistus. Oletetaan aluksi, että homogeeninen ratkaisu $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ on olemassa. Ottamalla Fourier-muunnoksen saamme $P(\xi)\hat{u} = \hat{v}$. Jos ϕ on testifunktio ja $0 \notin \operatorname{supp}(\phi)$, niin $\langle \hat{u}, \phi \rangle = \big\langle P(\xi)\hat{u}, \phi(\xi)/P(\xi) \big\rangle = \big\langle \hat{v}, \phi(\xi)/P(\xi) \big\rangle$, sillä ϕ/P on sileä. Kaikkien ratkaisujen Fourier-muunnokset siis laajentavat distribuutiota $U \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $\langle U, \phi \rangle = \langle \hat{v}, \phi/P \rangle$. Onko U homogeeninen? Olkoon $t > 0$, jolloin

$$\begin{aligned} \langle U, \phi_t \rangle &= \Big\langle \hat{v}, \frac{t^n \phi(t\xi)}{P(\xi)} \Big\rangle = \Big\langle \hat{v}, \frac{t^n \phi(t\xi)}{t^{-a} P(t\xi)} \Big\rangle = t^a \Big\langle \hat{v}, \big(\frac{\phi}{P}\big)_t \Big\rangle \\ &= t^{a+b+n} t^{-b-n} \Big\langle \hat{v}, \big(\frac{\phi}{P}\big)_t \Big\rangle = t^{a+b+n} \Big\langle \hat{v}, \frac{\phi}{P} \Big\rangle = t^{a+b+n} \langle U, \phi \rangle, \end{aligned} \tag{172}$$

sillä $\hat{u}$ on homogeeninen astetta $-b-n$. Siispä U on homogeeninen astetta $-a-b-n$. Koska $a+b \notin \mathbb{N}$, niin $-a-b-n \notin \{-n, -n-1, \ldots\}$. Lauseen 6.2.8 nojalla on olemassa yksikäsitteinen homogeeninen $\tilde{u} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, joka laajentaa distribuution U koko avaruuteen. Koska kaikkien ratkaisujen Fourier-muunnosten on oltava homogeenisia ja niiden rajoittuma joukkoon $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on U, niin laajennuksen yksikäsitteisyydestä seuraa ratkaisun u yksikäsitteisyys.

Nyt olemassaolo seuraa aika helposti. Lauseen 6.2.8 konstruktiolla näemme, että

$$\langle \tilde{u}, \phi \rangle = \langle U, F\phi \rangle = \langle \hat{v}, \frac{F\phi}{P} \rangle. \tag{173}$$

Huomautuksen 6.2.10 nojalla F on määritelty ja jonojatkuva myös nopeasti väheneville testifunktioille. Siispä $\tilde{u} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Määrittelemällä $u = \mathscr{F}^{-1}(\tilde{u})$ saamme alkuperäiselle yhtälölle temperoidun homogeenisen ratkaisun. Nimittäin koska P on elliptinen ja $\tilde{u}$ laajentaa distribuutiota $U = \hat{v}/P_{|\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$, niin $P\tilde{u}$ laajentaa distribuutiota $\hat{v}_{|\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$. Triviaalisti myös $\hat{v}$ laajentaa distribuutiota $\hat{v}_{|\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$. Koska $a \in \mathbb{N}$ ja $a + b \notin \mathbb{N}$, niin b ei ole luonnollinen luku. Siispä distribuution $\hat{v}$ aste $-b-n$ ei ole enintään $-n$ oleva kokonaisluku. Niimpä homogeenisen laajennuksen (lause 6.2.8) yksikäsitteisyyden perusteella $P\tilde{u} = \hat{v}$. Siispä

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{|\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} = \hat{v}_{|\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}/P &\implies P\tilde{u}_{|\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} = \hat{v}_{|\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \implies P\tilde{u} = \hat{v} \\ &\implies P(D)u = v. \end{aligned} \tag{174}$$

□

Viitteet

[d'Alembert 1747] Jean le Rond d'Alembert, Recherche sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration. *Hist. et Mem. Acad. Sci. Berlin*, 3 (1747), sivut 214-249.

[d'Alembert 1761] Jean le Rond d'Alembert, Sur les vibrations des cordes sonores. *Opuscules Mathématiques*, 1 (1761), sivut 1-64 ja Supplément, sivut 65-73.

[Bôcher 1905/06] Maxime Bôcher, On harmonic functions in two dimensions. *Proc. Amer. Acad. Sci.*, 41 (1905/06), sivut 577-583.

[Courant, Hilbert 1924] Richard Courant, David Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik, I. Berlin, 1924.

[Euler 1748] Leonhard Euler, Sur la vibration des cordes. *Mém. Acad. Sci. Berlin*, 4 (1748)(julk. 1750) = *Opera Omnia*, 10 (2), sivut 63-77.

[Gel'fand & Shilov 1964] Israïl Moiseevich Gelfand, Georgii Evgen'evich Shilov; Generalized Functions, Osa 1. *Academic Press*, New York 1964.

[Green 1828] George Green, An Essay on the Applicability of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism. Nottingham, 1828.

[Hörmander I] Lars Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators I, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg* 2003 jälkipainos.

[Lützen 1982] Jesper Lützen, The Prehistory of the Theory of Distributions. *Spriner-Verlag New York Inc.* 1982.

[Petrini 1899] Henrik Petrini, Démonstration générale de l'équation de Poisson $\Delta V = -4\pi\rho$ en ne supposant que ρ soit continue. *K. Vet. Akad. Öfvers.* Stockholm, 1899.

[Petrini 1908] Henrik Petrini, Les dérivées premiers et secondes du potentiel. *Acta Math.*, 31 (1908), sivut 127-332.

[Rudin] Walter Rudin, Real & Complex Analysis, *WCB/McGraw-Hill*, 3. painos.

[Saksman] Eero Saksman, Distribuutiot ja Fourier-muunnos luentomuistiinpanot, syksy 2002, Helsingin Yliopisto, matematiikan laitos.

[Schwartz 1950] Laurent Schwartz, Théorie des Distributions. Osa 1, Pariisi, 1950. Osa 2, Pariisi, 1951.

[Sobolev 1936] Sergei L. Sobolev, Méthode nouvelle à resoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales. *Mat. Sb.*, 1 (1936), sivut 39-71.

[Wiener 1926] Norbert Wiener, The operational calculus. *Math. Ann.*, 95 (1926), sivut 557-584.